

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DEPARTAMENTO DE GEMOLOGIA

# CURSO CRISTALOGRAFIA I – 2016/2

PROF<sup>a</sup> DR<sup>a</sup> DANIELA TEIXEIRA CARVALHO DE NEWMAN

## CRISTALOGRAFIA MORFOLÓGICA

SIMETRIA

# CRISTALOGRAFIA

---

• **Propriedades físicas**



**Estrutura interna**

É a parte da mineralogia que estuda os cristais que podem ser definidos como sendo um sólido homogêneo com ordem interna tridimensional que, sob condições favoráveis, pode manifestar-se externamente por superfícies limitantes planas e lisas. Lida com cristais e com substâncias cristalinas.

Os minerais que advêm de um processo lento de formação (cristalização), tendem a formar uma estrutura cristalina apresentando forma poliédrica compatível com o arranjo atômico interno (quando há espaço disponível para o seu crescimento)

**Mineral = composição química + estrutura cristalina → propriedades físicas**

# SIMETRIA DOS POLIEDROS CRISTALINOS

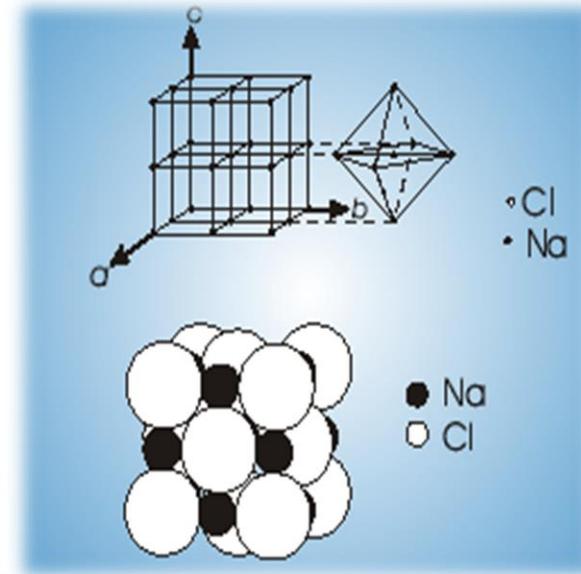
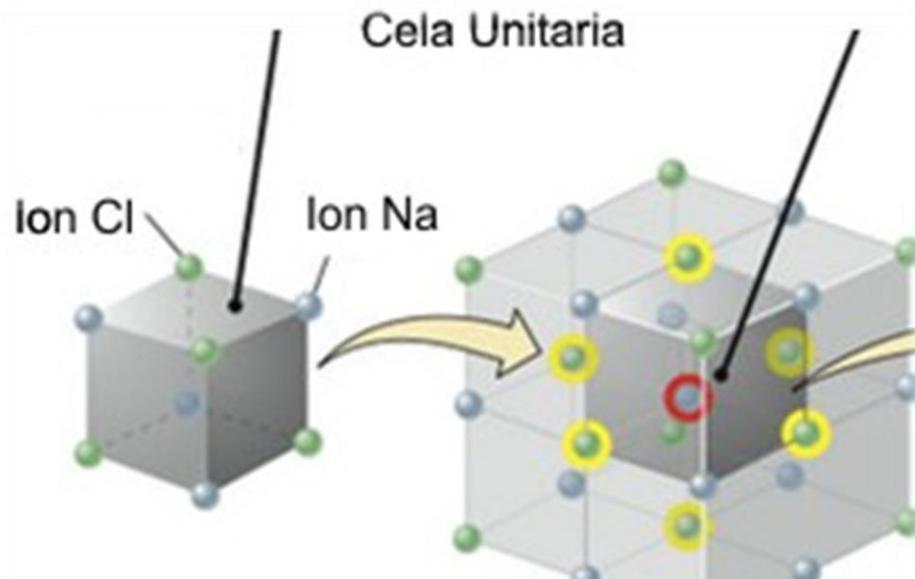
- DISTRIBUIÇÃO DAS FACES QUE DELIMITAM OS POLIEDROS CRISTALINOS NO ESPAÇO É REGULAR;
- REGULARIDADE EXPRESSA EM LADOS OPOSTOS DE UM PONTO, UMA LINHA OU UM PLANO MÉDIO (SIMETRIA DO CRISTAL);
- REPETIÇÃO REGULAR DE ELEMENTOS MORFOLÓGICOS (FACES, ARESTAS, VÉRTICES);
- ESTRUTURA DOS CRISTAIS DEVE SER IDEALMENTE SIMETRICA;
- **SIMETRIA É UMA PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DOS CRISTAIS E QUE OS DIFERENCIA DOS MATERIAIS AMORFOS;**
- **TODO CRISTAL POSSUI CERTA SIMETRIA.**

# ELEMENTOS E OPERAÇÕES DE SIMETRIA NA MORFOLOGIA

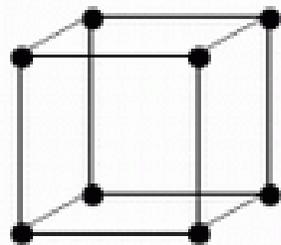
- **POR MEIO DE PARÂMETROS DE SIMETRIA É POSSÍVEL DEDUZIR TODAS AS FACES DE UM CRISTAL IDEAL;**
- QUANDO SE TRATA DA CRISTALOGRAFIA MORFOLÓGICA A INCONSTÂNCIA INTERNA POSSÍVEL DE OCORRER NA MAIORIA DOS CRISTAIS É POUCO CONVENIENTE;
- O ELEMENTO DE SIMETRIA PODE SER UM **PONTO**, UMA **LINHA** OU UM **PLANO**;
- **O MOVIMENTO PELO QUAL O GRUPO DE FACES SURGE DE UMA FACE FUNDAMENTAL DENOMINA-SE OPERAÇÃO DE SIMETRIA;**

# CELA UNITÁRIA

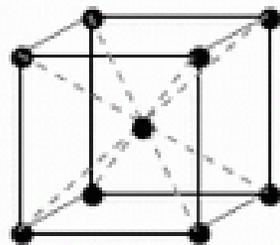
A ESTRUTURA CRISTALINA DOS MINERAIS É DADA PELA REPETIÇÃO PERIÓDICA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL, DE UMA UNIDADE FUNDAMENTAL (**CELA UNITÁRIA**) CONSTITUÍDA POR UM CONJUNTO DE ÁTOMOS OU ÍONS.



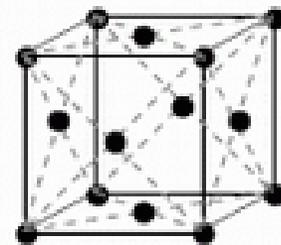
# TIPOS DE CELA UNITÁRIA (14 RETÍCULOS DE BRAVAIS)



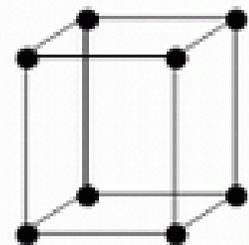
Cúbica Simples



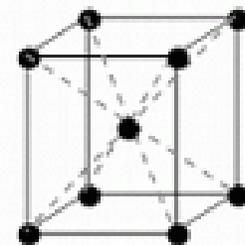
Cúbica de Corpo Centrado



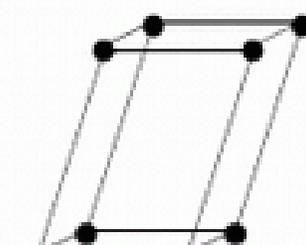
Cúbica de Faces Centradas



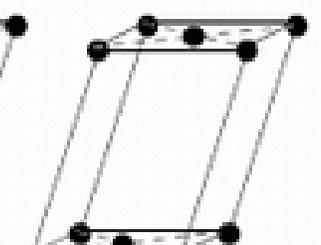
Tetragonal Simples



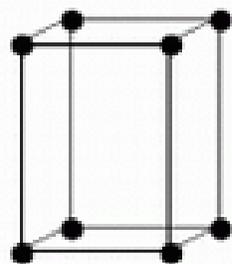
Tetragonal de Corpo Centrado



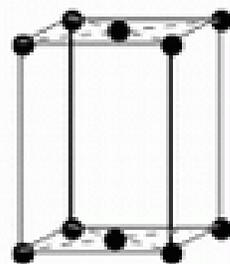
Monoclínica Simples



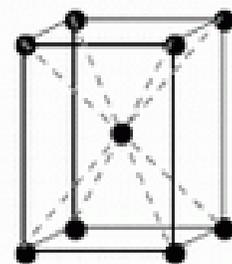
Monoclínica Centrada nas Bases



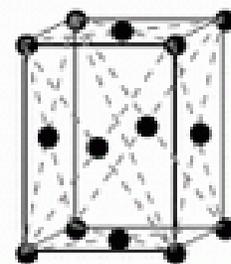
Ortorrômbica Simples



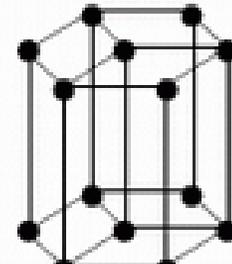
Ortorrômbica Centrada nas Bases



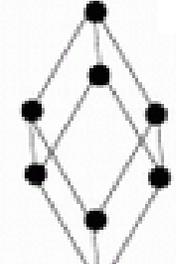
Ortorrômbica de Corpo Centrado



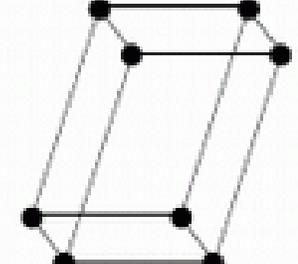
Ortorrômbica de Faces Centradas



Hexagonal



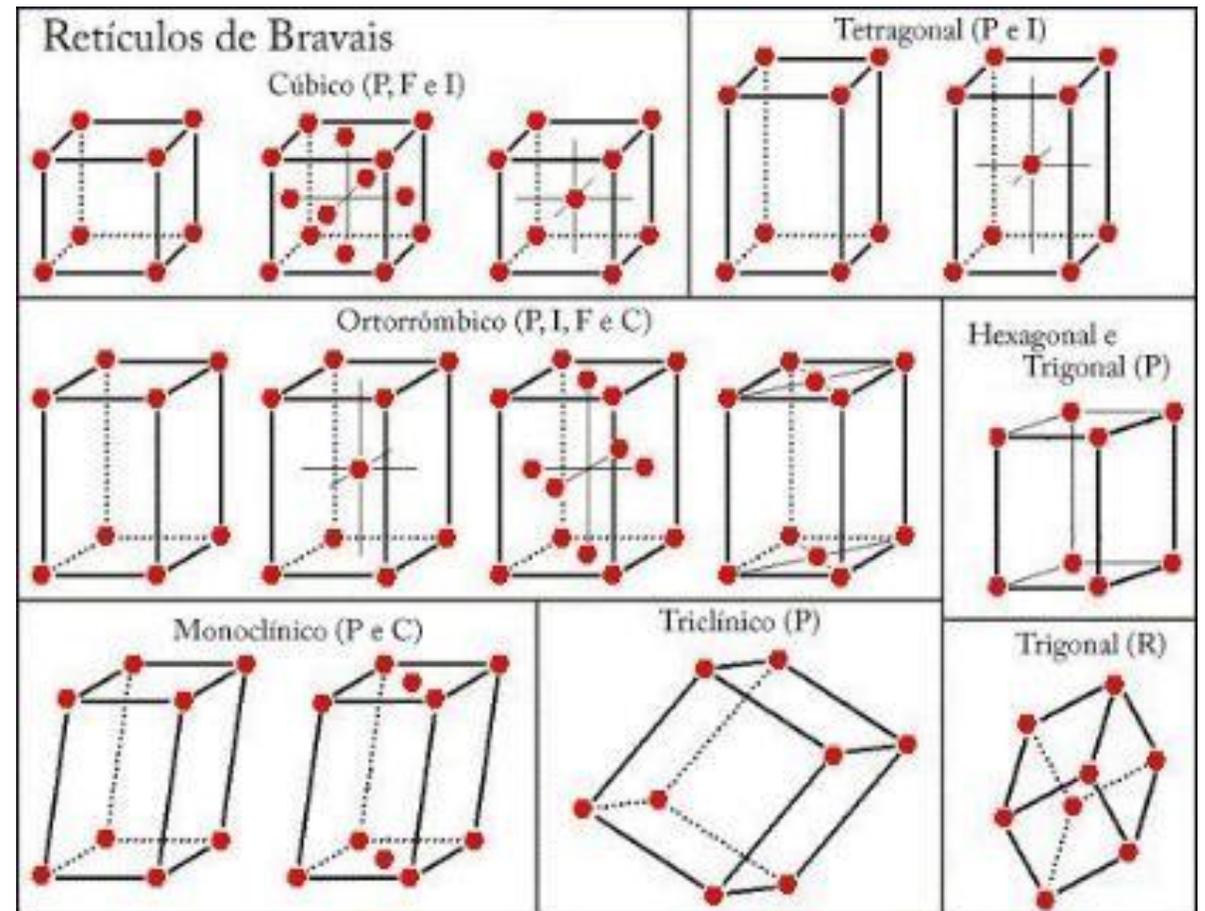
Romboédrica



Triclínica

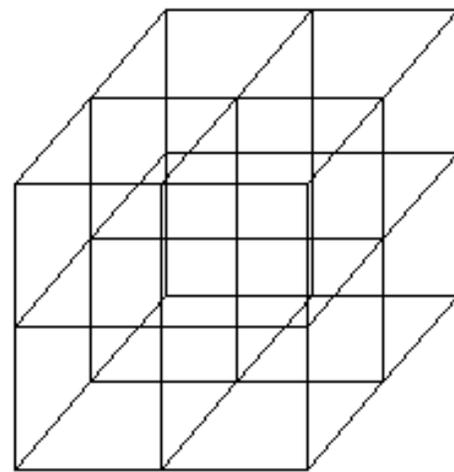
# TIPOS DE CELA UNITÁRIA (14 RETÍCULOS DE BRAVAIS)

- P - PRIMITIVA;
- I- CORPO CENTRADO
- F- FACES CENTRADAS
- C- UM PONTO RETICULAR EM FACES OPOSTAS
- R- ROMBOÉDRICO



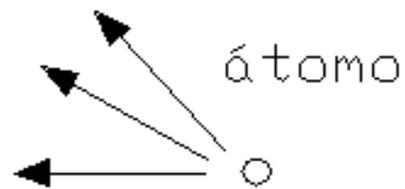
# RETÍCULO CRISTALINO

É O ARRANJO ESTRUTURAL TRIDIMENSIONAL INTERNO DAS CRISTAIS.



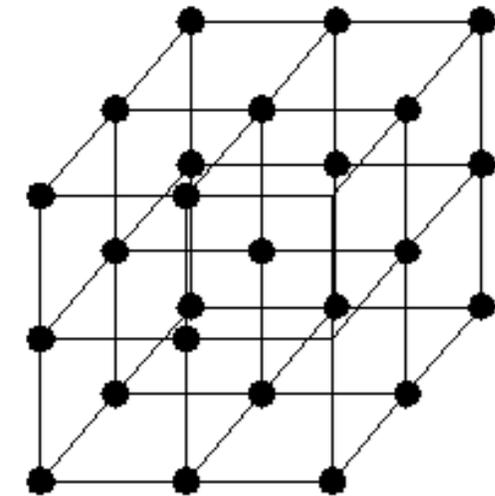
↑  
rede

+



↑  
base

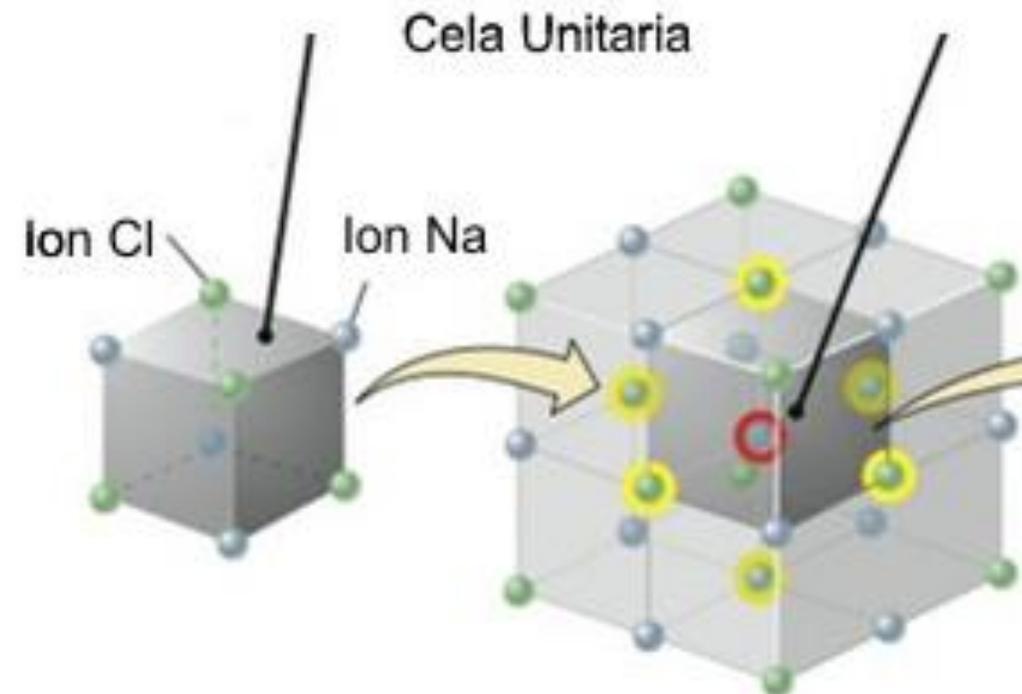
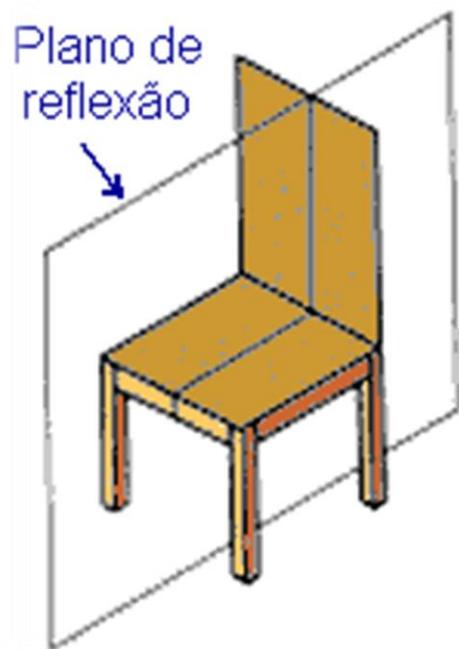
=



↑  
estrutura cristalina

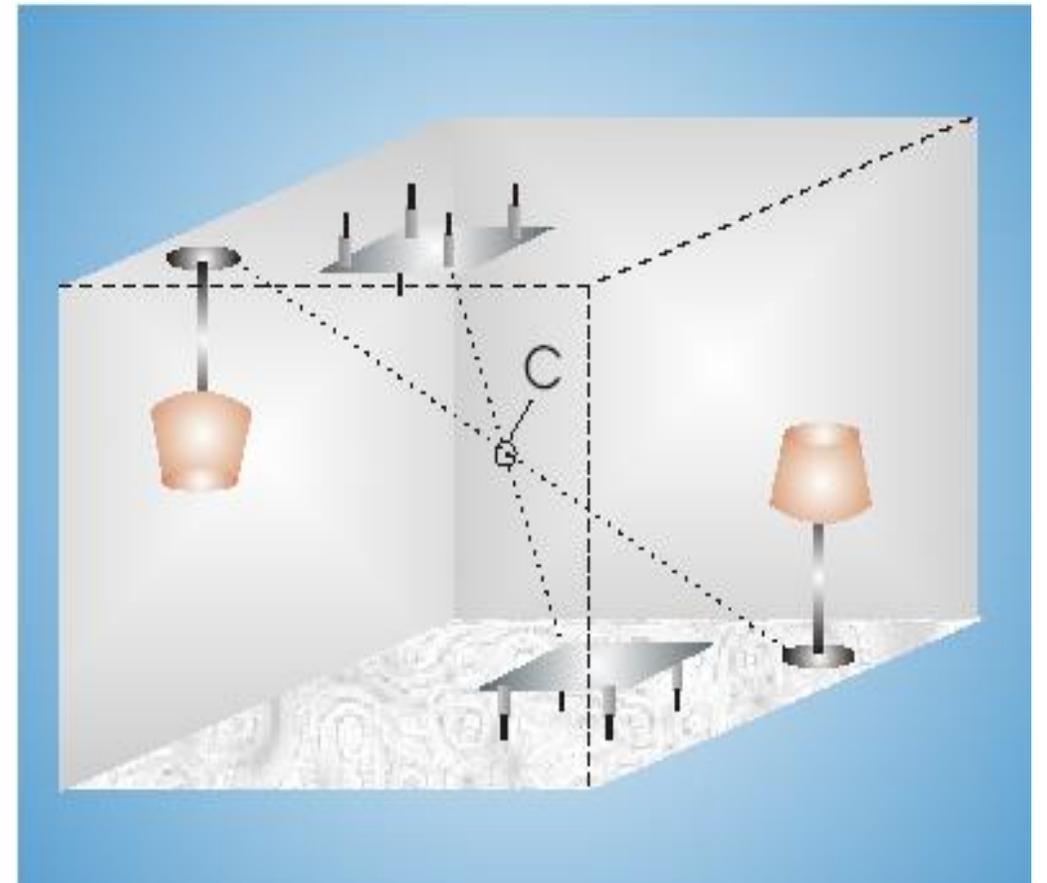
# ELEMENTOS DE SIMETRIA

- **PLANO DE SIMETRIA:** É O PLANO QUE DIVIDE O CRISTAL EM DUAS METADES IGUAIS E SIMÉTRICAS



# ELEMENTOS DE SIMETRIA

- **CENTRO DE SIMETRIA:** É O PONTO DE SIMETRIA COINCIDENTE COM O CENTRO GEOMÉTRICO DO CRISTAL, E EQÜIDISTANTE DE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE SIMETRIA INVERTIDA EM RELAÇÃO A ELE

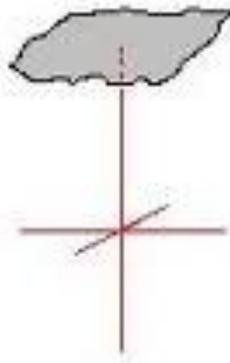


# ELEMENTOS FECHADOS DE SIMETRIA (SIMETRIA DO CONTÍNUO)

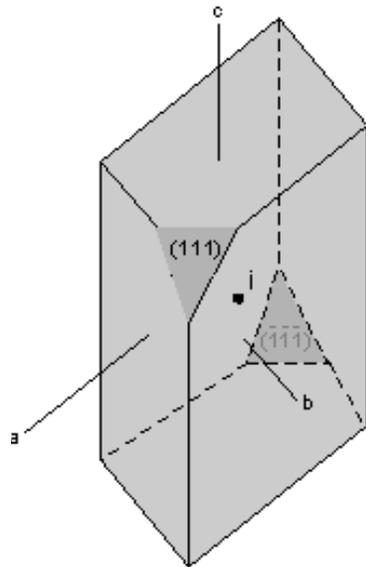
PARÂMETROS DE SIMETRIA	OPERAÇÃO DE SIMETRIA	ÍNDICE
CENTRO DE SIMETRIA	INVERSÃO (SIMETRIA POR PONTO)	$\bar{1}$
PLANO DE SIMETRIA	REFLEXÃO (SIMETRIA POR PLANO)	M
EIXO DE ROTAÇÃO	ROTAÇÃO (SIMETRIA POR EIXO)	1, 2, 3, 4, 6
EIXO DE INVERSÃO	ROTAÇÃO + INVERSÃO	$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}$

# FORMAS ABERTAS

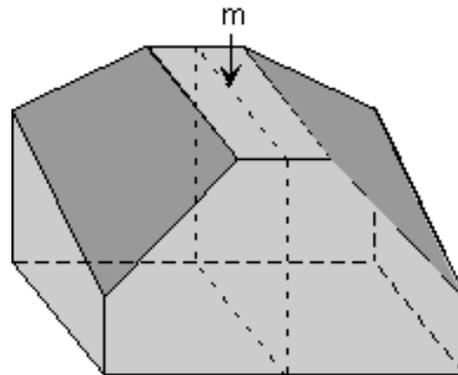
**PÉDIO**



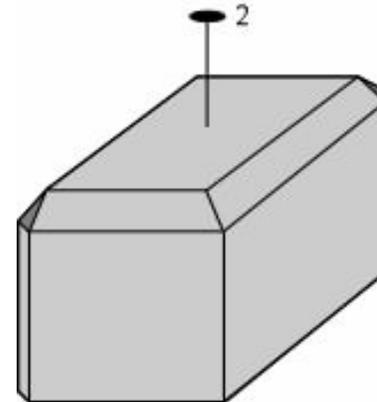
**PINACOIDE**



**DOMO**



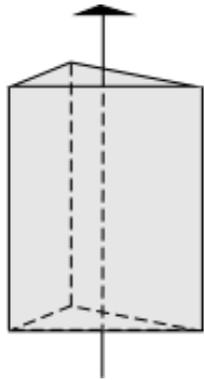
**ESFENOIDE**



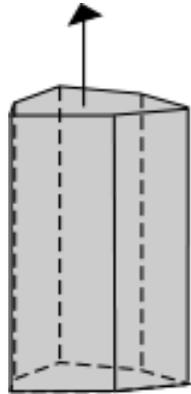
# FORMAS ABERTAS

## PRISMAS

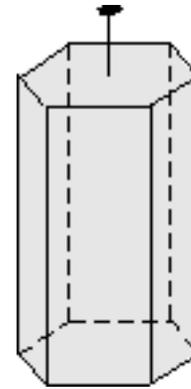
prisma trigonal



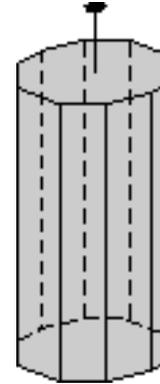
prisma ditrigonal



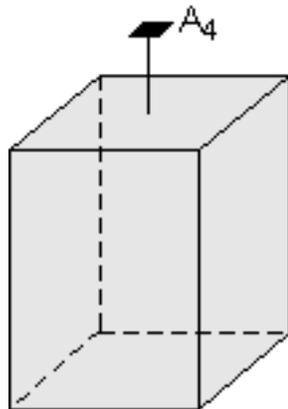
prisma hexagonal



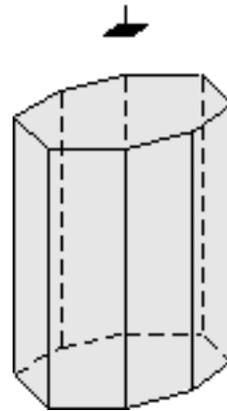
prisma dihexagonal



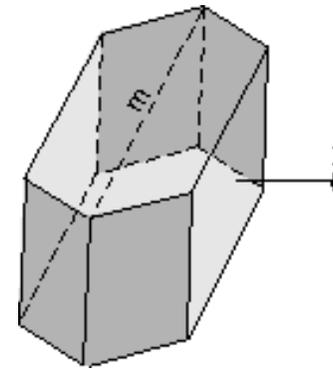
prisma tetragonal



prisma ditetragonal



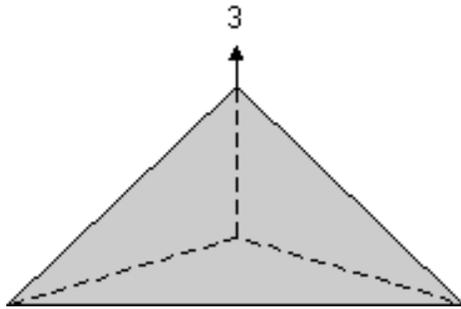
prisma rômbo



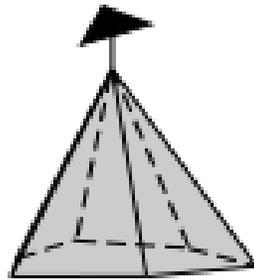
# FORMAS ABERTAS

## PIRÂMIDES

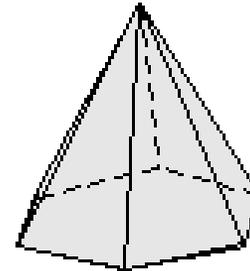
pirâmide trigonal



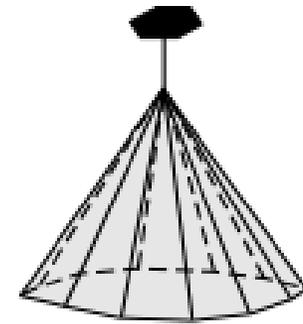
pirâmide ditrigonal



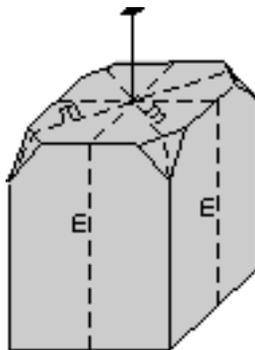
pirâmide hexagonal



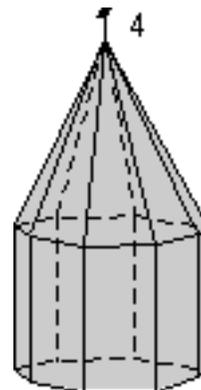
pirâmide dihexagonal



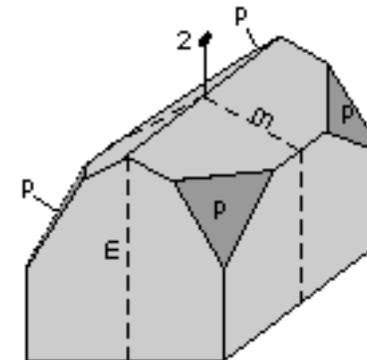
pirâmide tetragonal



pirâmide ditetragonal



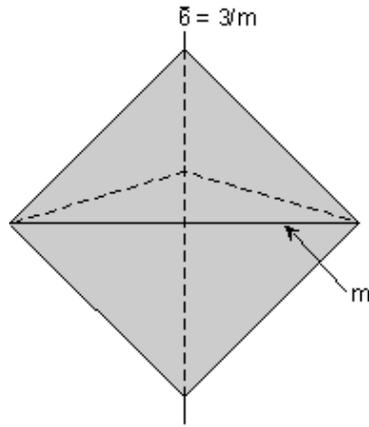
pirâmide rômbrica



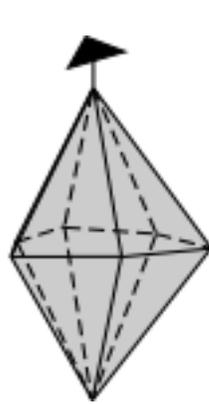
# FORMAS FECHADAS

## BIPIRÂMIDES

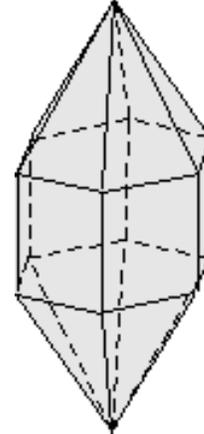
bipirâmide trigonal    bipirâmide ditrigonal    bipirâmide hexagonal    bipirâmide dihexagonal



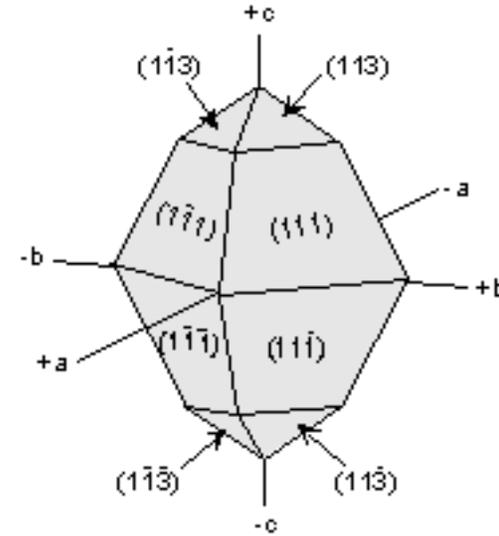
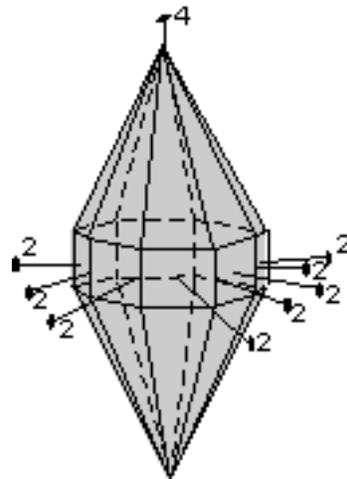
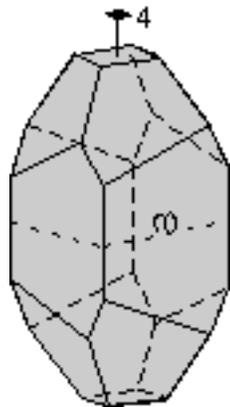
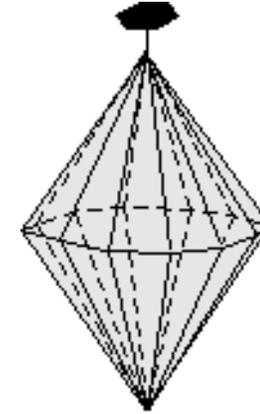
**bipirâmide tetragonal**



**bipirâmide ditetragonal**

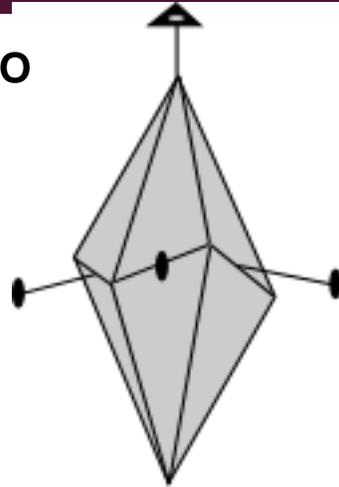


**bipirâmide rômbrica**

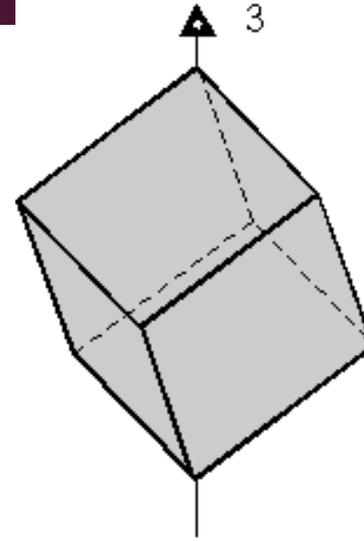


# FORMAS FECHADAS

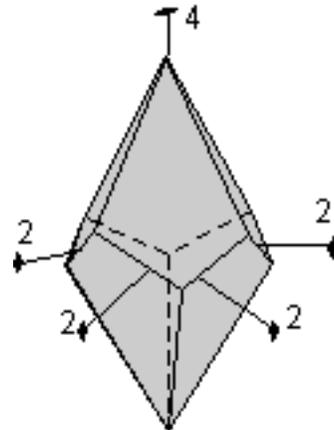
ESCALENOEDRO



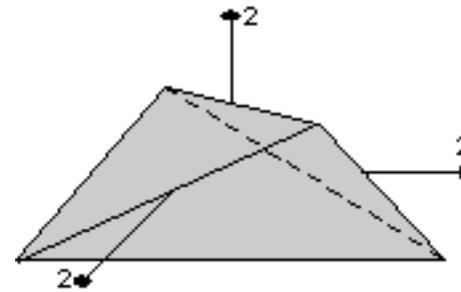
ROMBOEDRO



TRAPEZOEDRO

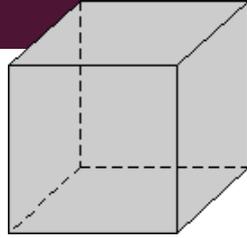


BIESFENOIDE

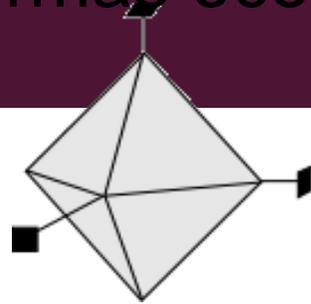


# FORMAS FECHADAS

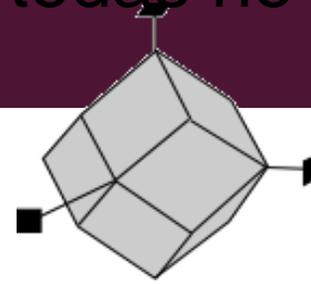
as demais formas ocorrem todas no sistema cúbico



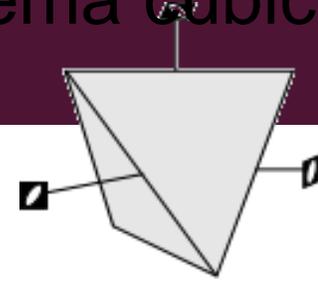
CUBO



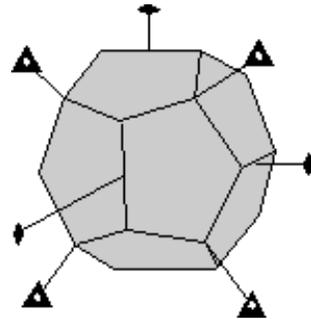
OCTAEDRO



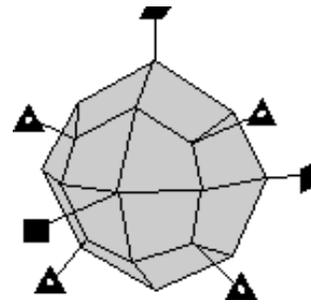
ROMBODOECAEDRO



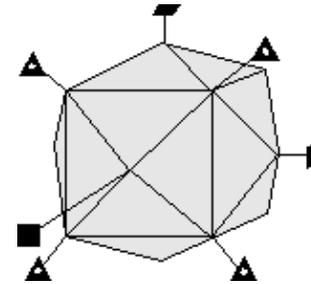
TETRAEDRO



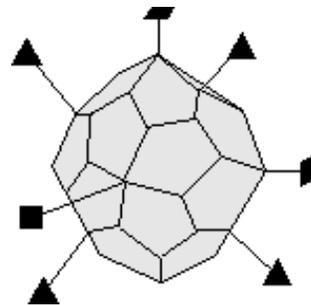
PENTADODECAEDRO



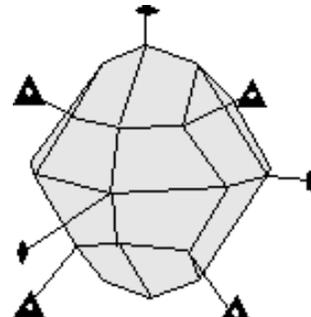
TRAPEZOEDRO



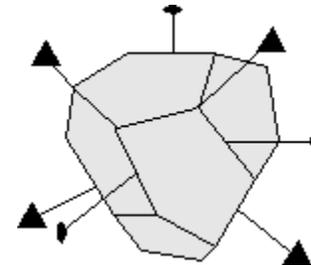
TETRAEXAEDRO



GIROEDRO

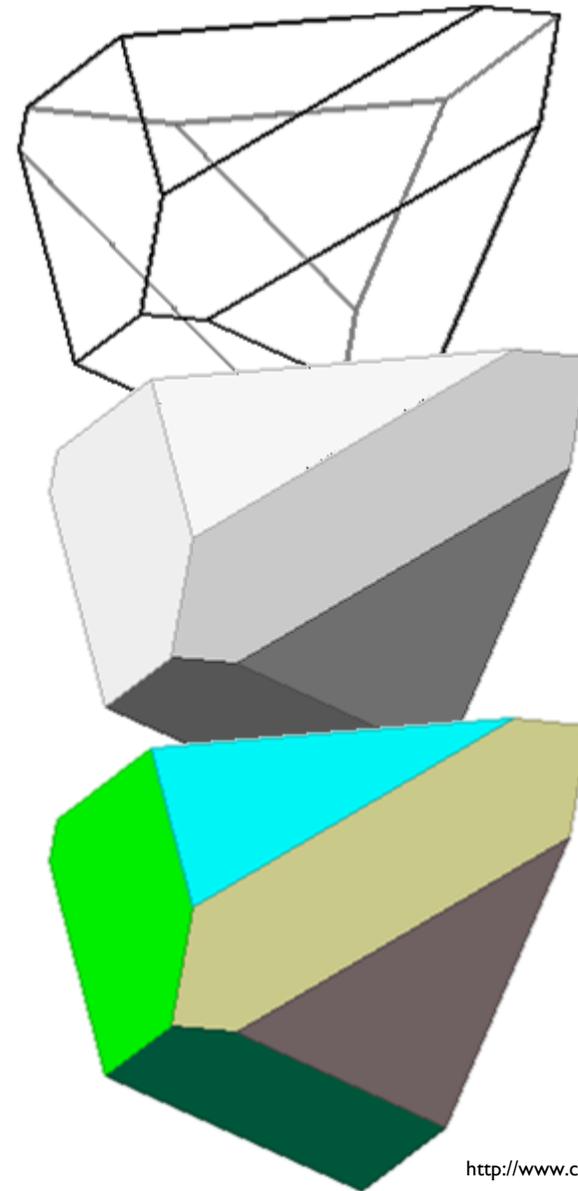
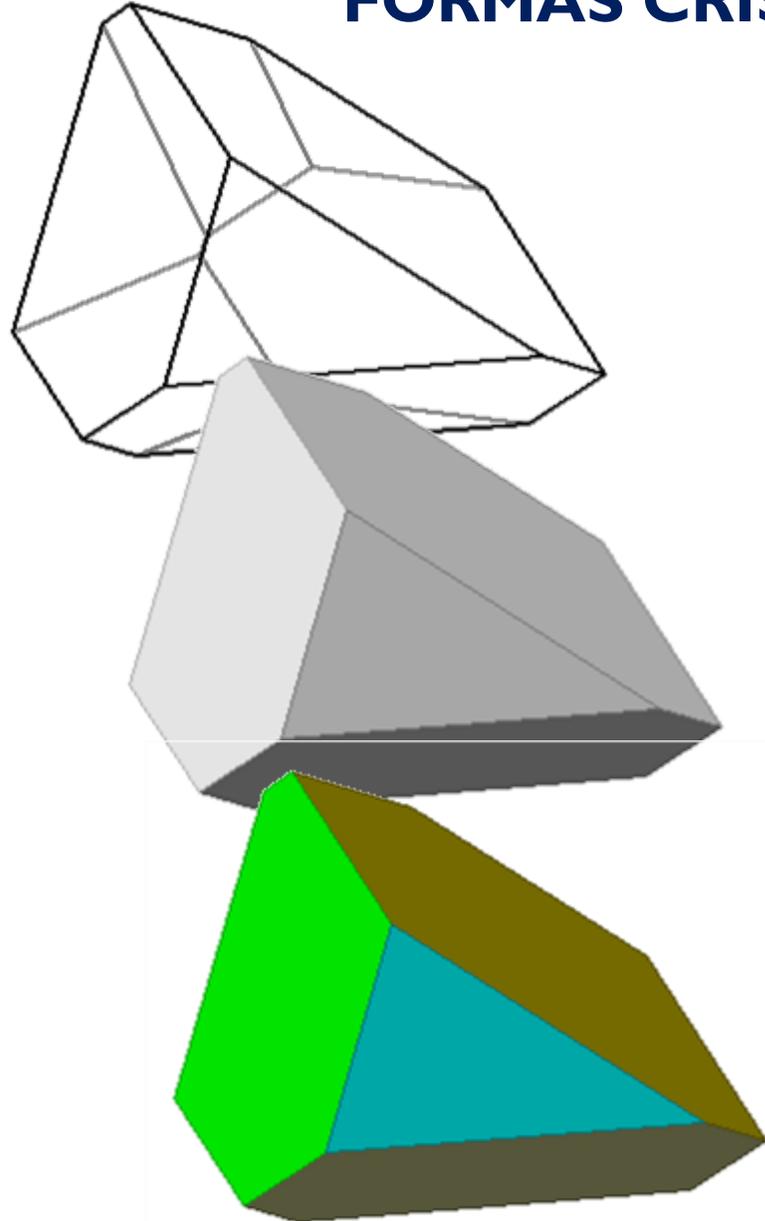


DIPLOEDRO



TETARTOEDRO

# FORMAS CRISTALOGRÁFICAS



# SISTEMAS CRISTALINOS

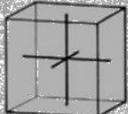
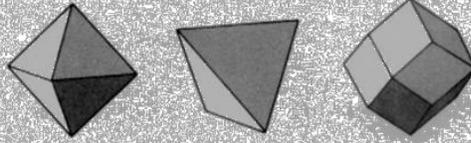
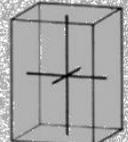
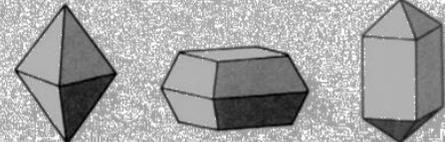
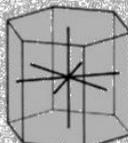
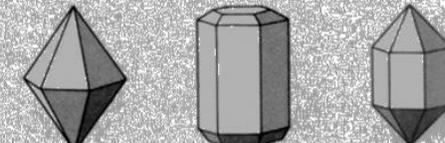
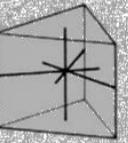
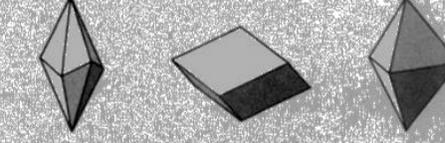
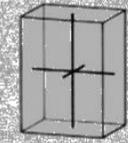
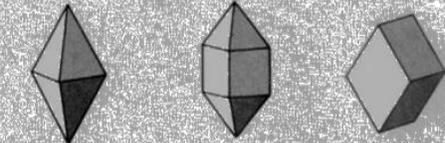
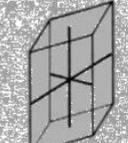
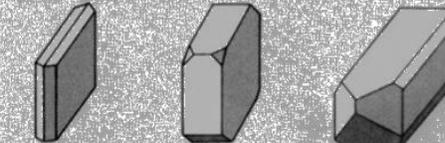
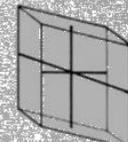
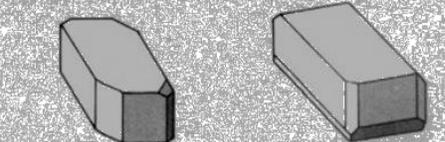
<b>classe</b>	<b>cte. lineares e angulares</b>	<b>exemplos</b>
<b>triclínico</b>	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$	<b>turquesa, cianita, microclínio</b>
<b>monoclínico</b>	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90^\circ$ e $\beta \neq 90^\circ$	<b>malaquita, kunzita, euclásio</b>
<b>ortorrômbico</b>	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	<b>topázio, crisoberilo</b>
<b>trigonal *</b>	$a_1 = a_2 = a_3 \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ$ e $\gamma = 120^\circ$	<b>quartzo, <i>turmalina</i></b>
<b>tetragonal</b>	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	<b>escapolita, zircão, rutilo</b>
<b>hexagonal *hexagonal-R</b>	$a_1 = a_2 = a_3 \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ$ e $\gamma = 120^\circ$	<b>berilo, coríndon, apatita</b>
<b>cúbico</b>	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	<b>diamante, <i>granada</i>, fluorita</b>

Escola europeia - 7 sistemas;

Escola americana - 6 sistemas: hexagonal-R = trigonal (R - romboedro)

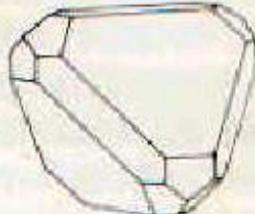
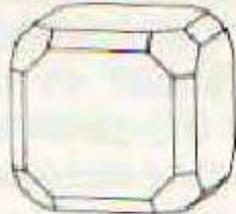
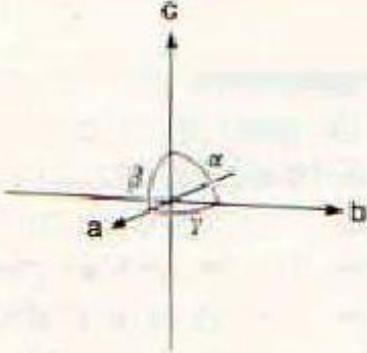
# Los siete sistemas cristalinos

A la izquierda se encuentra una representación del sistema de ejes correspondiente, en el centro una breve explicación del sistema cristalino y a la derecha unos ejemplos típicos del sistema en cuestión.

	<p><b>Sistema cristalino cúbico:</b> 3 ejes de igual longitud que se cruzan en ángulo recto.  <math>a = b = c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ</math>                      Un cristal es cúbico cuando posee por lo menos 2 ejes de simetría ternarios.</p>	
	<p><b>Sistema cristalino tetragonal:</b> 2 ejes de igual longitud y un tercero más largo o más corto. Todos se cortan en ángulo recto  <math>a = b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ</math>                      Un cristal es tetragonal cuando posee un único eje de simetría cuaternario.</p>	
	<p><b>Sistema cristalino hexagonal:</b> 3 ejes de igual longitud, situados en un mismo plano y que se cortan en ángulos de <math>120^\circ</math>. El cuarto eje es más largo o más corto y es perpendicular a este plano.  <math>a_1 = a_2 = a_3 \neq c; \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ</math>                      Un cristal es hexagonal cuando presenta un eje de simetría senario.</p>	
	<p><b>Sistema cristalino trigonal:</b> 3 ejes de igual longitud, situados en un plano y que se cortan en ángulos de <math>120^\circ</math>. El cuarto eje es más largo o más corto y es perpendicular a este plano.  <math>a_1 = a_2 = a_3 \neq c; \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ</math>                      Un cristal es trigonal cuando presenta un eje de simetría ternario.</p>	
	<p><b>Sistema cristalino ortorrómbico:</b> 3 ejes de distinta longitud que se cortan en ángulo recto.  <math>a \neq b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ</math>                      Un cristal es ortorrómbico cuando posee sólo ejes de simetría binarios y/o planos de simetría, y sólo dos ejes o dos planos.</p>	
	<p><b>Sistema cristalino monoclinico:</b> 3 ejes de distinta longitud. 2 de ellos se cortan en ángulo recto, el ángulo del tercero con estos dos puede ser cualquiera, pero siempre distinto de <math>90^\circ</math>.  <math>a \neq b \neq c; \alpha = \gamma = 90^\circ, \beta \neq 90^\circ</math>                      Un cristal es monoclinico cuando sólo posee un eje de simetría binario y/o sólo un plano de simetría.</p>	
	<p><b>Sistema cristalino triclinico:</b> 3 ejes de distinta longitud que se cortan en ángulos distintos de <math>90^\circ</math>.  <math>a \neq b \neq c; \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ</math>                      Un cristal es triclinico cuando no tiene ni ejes ni planos de simetría.</p>	

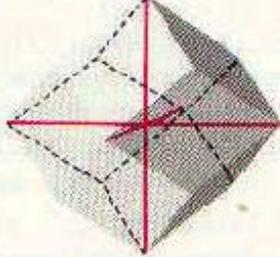
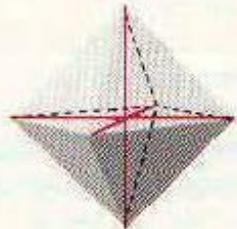
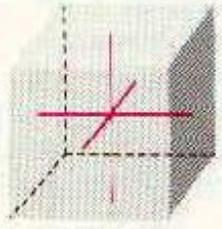
# SISTEMA CÚBICO

Cúbico (o regular)  
 $a = b = c$   
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$



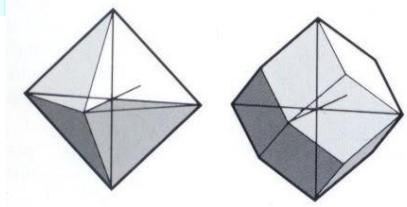
Uraninita      Boracita

Sistema Cúbico



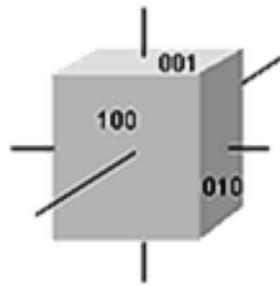
Cubo      Octaedro      Rombododecaedro

<http://www.rocksinmyheadtoo.com/Systems.htm>

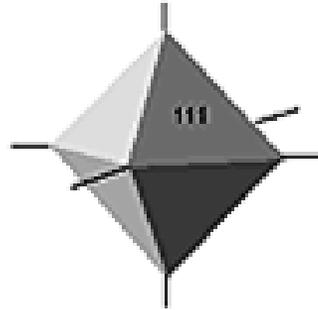


Isometric ~ Cubic

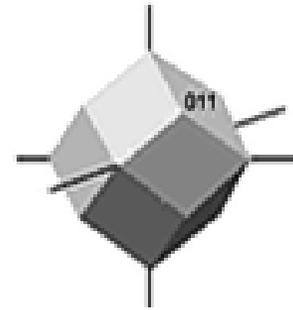
# DIVERSOS TIPOS DE HÁBITOS



cubo  
{001}

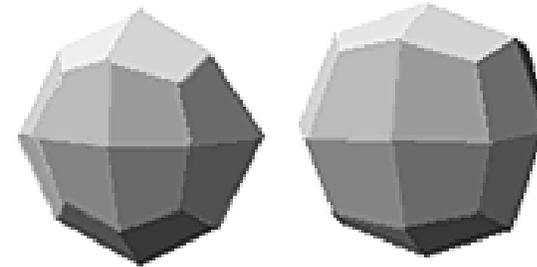


octaedro  
{111}



rombododecaedro  
{011}

Hermann-Mauguin {hkl}



trapezoedro

{hhl}



tetrahexaedro  
{0kl}

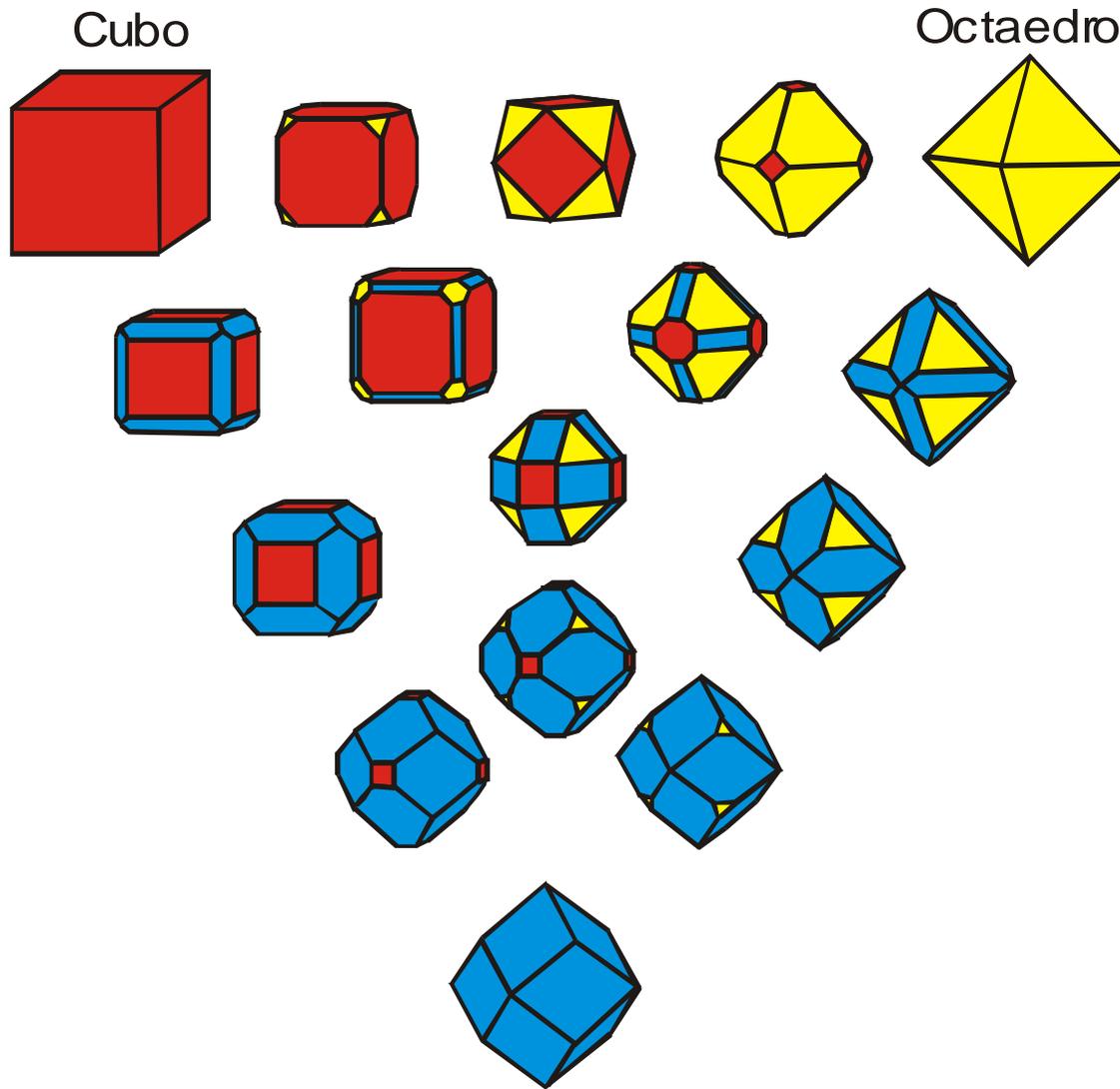


hexaoctaedro  
{hkl}



trioctaedro  
{hll}

# Combinações de formas



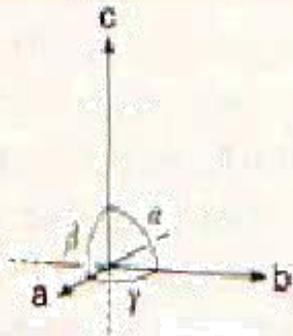
Cubo

Octaedro

Rombododecaedro

# SISTEMA TETRAGONAL

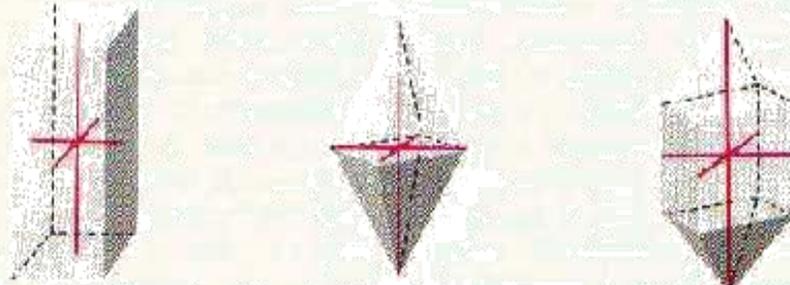
Tetragonal  
 $a = b \neq c$   
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$



Wulfenita

Circón

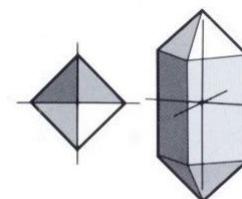
Sistema Tetragonal



Prisma tetragonal e e pinacóide basal

Bipirâmide

Pirâmide com prisma



Tetragonal

# SISTEMA TRIGONAL

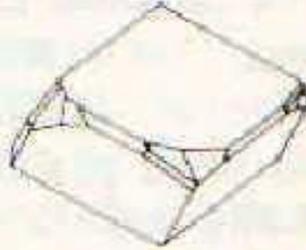
Romboédrico (o trigonal)  
 $a_1 = a_2 = a_3$   
 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq 90^\circ$



Corindón



Dolomita



Sistema Trigonal



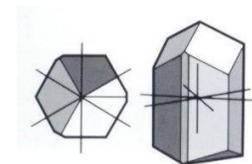
Bipirâmide



Romboedro



Escalenoedro



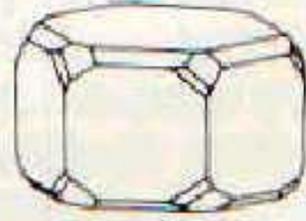
Trigonal

# SISTEMA HEXAGONAL

Hexagonal  
 $a_1 = a_2 = a_3 \neq c$   
 $\alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 120^\circ$



Wurtzita



Apatita

Sistema Hexagonal



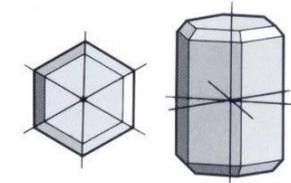
Prisma hexagonal e pinacóide basal



Prisma hexagonal e pinacóide basal



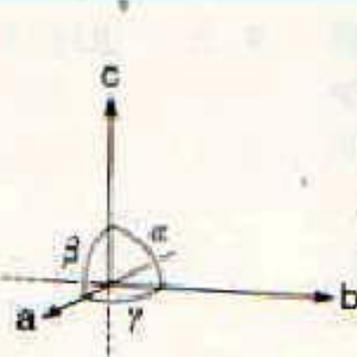
Bipirâmide hexagonal



Hexagonal

# SISTEMA ORTORRÔMBICO

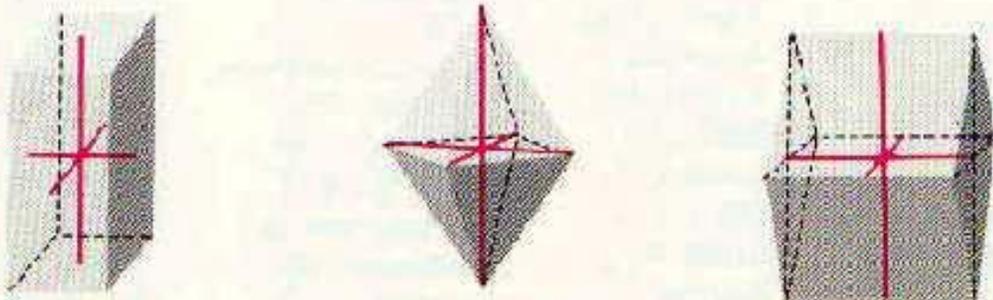
Rômbico  
 $a \neq b \neq c$   
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$



Olivino

Celestina

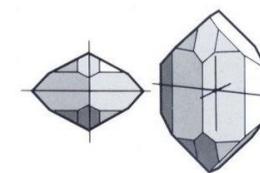
Sistema Ortorrômbico



Pinacóides

Bipirâmide

Prisma e pinacóide



Orthorhombic

# SISTEMA MONOCLÍNICO

Monoclinico  
 $a \neq b \neq c$   
 $\alpha = \gamma = 90^\circ; \beta \neq 90^\circ$



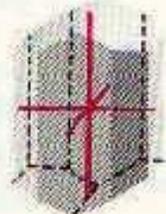
Vivianita

Colemanita

Sistema Monoclínico



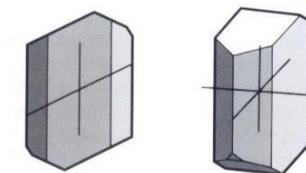
Pinacóides



Prismas e pinacóides

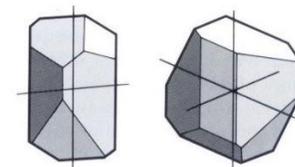
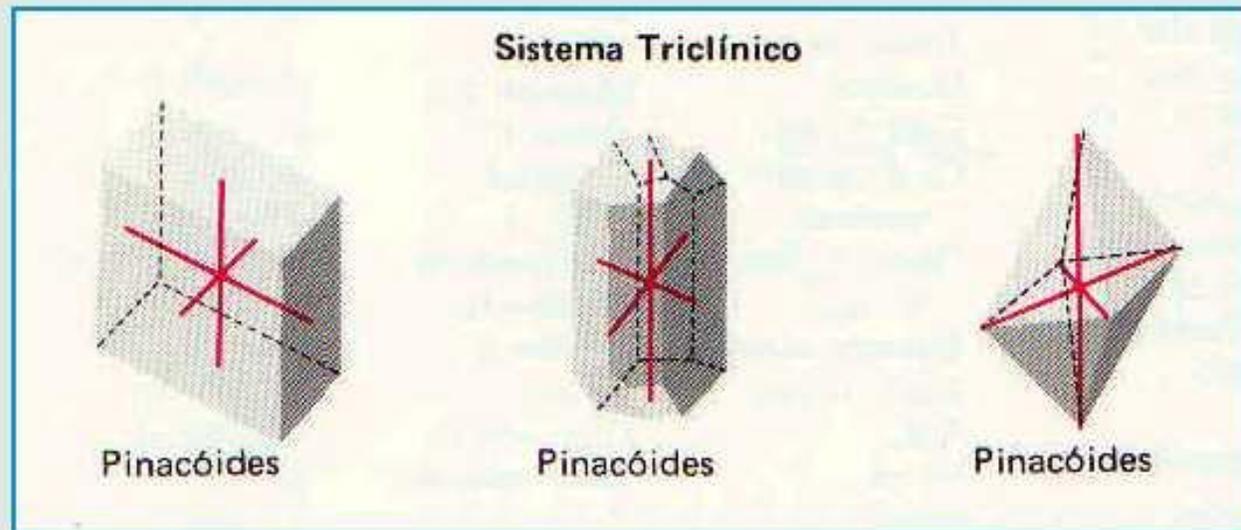
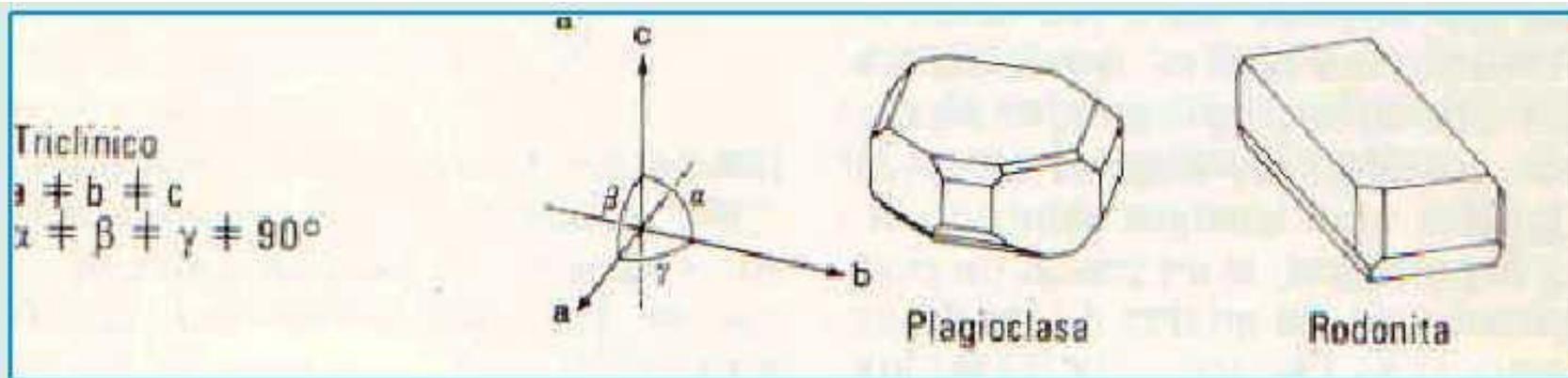


Prismas e Clinopinacóide



Monoclinic

# SISTEMA TRICLÍNICO



Triclínico

<http://www.edu.xunta.es/contidos/premios/p2004/c/xelmirez/galeria/html/cristrombico.htm>



*rómbico*



*regular*

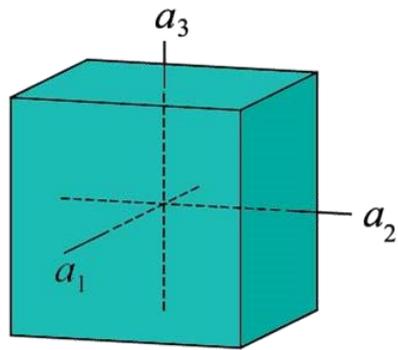


*triclínico*

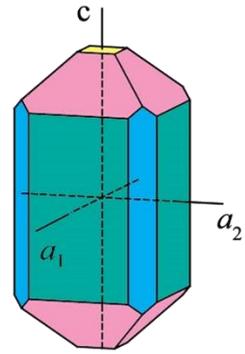


*hexagonal*

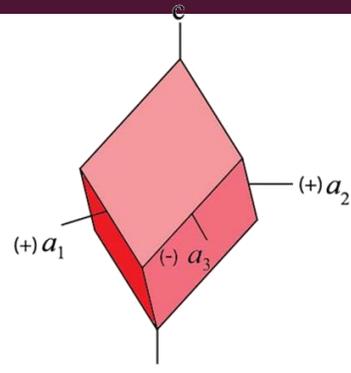
# RESUMO DOS SISTEMAS CRISTALINOS



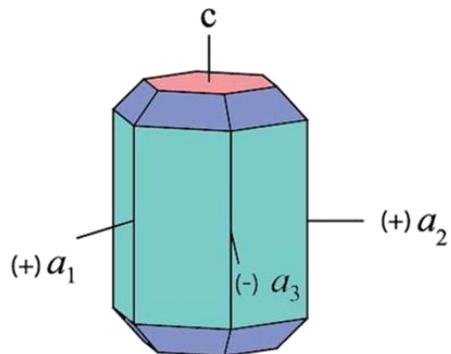
**SISTEMA CÚBICO**  
Isométrico ou regular



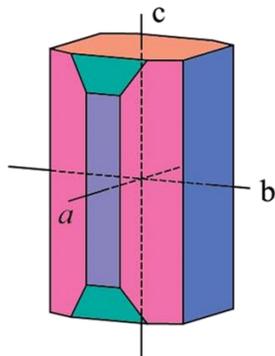
**SISTEMA TETRAGONAL**



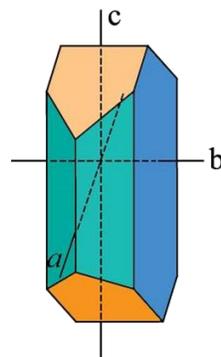
**SISTEMA TRIGONAL**



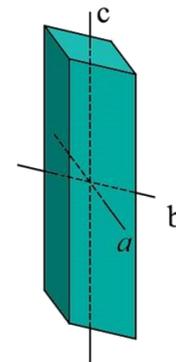
**SISTEMA HEXAGONAL**



**SISTEMA ORTORRÔMBICO**



**SISTEMA MONOCLÍNICO**



**SISTEMA TRICLÍNICO**

## Diferentes sistemas cristalinos observados a partir do hábito cristalino



anatásio (sistema tetragonal)



diamante (sistema cúbico)



espinélio = (sistema cúbico) = diamante

coríndon (sistema trigonal)



berilo (sistema hexagonal)





## Operações de simetria:

- Rotação em torno de um eixo;
- Reflexão sobre um plano;
- Rotação em torno de um eixo combinada com inversão rotatória.

# SIMETRIA

**Motivo:** a parte fundamental de um desenho geométrico e simétrico que, quando repetida, cria todo o padrão;

**Operação:** algum ato que reproduz o motivo, criando um padrão;

**Elemento:** uma operação localizada em um ponto particular do espaço.

# SIMETRIA 2-D

- Elementos de Simetria

1. Rotação

- a. Rotação binária

- =  $360^\circ/2$  rotação

- Motivo em um padrão simétrico

Padrão Simétrico

6

9

# SIMETRIA 2-D

## Elementos Simetria

### 1. Rotação

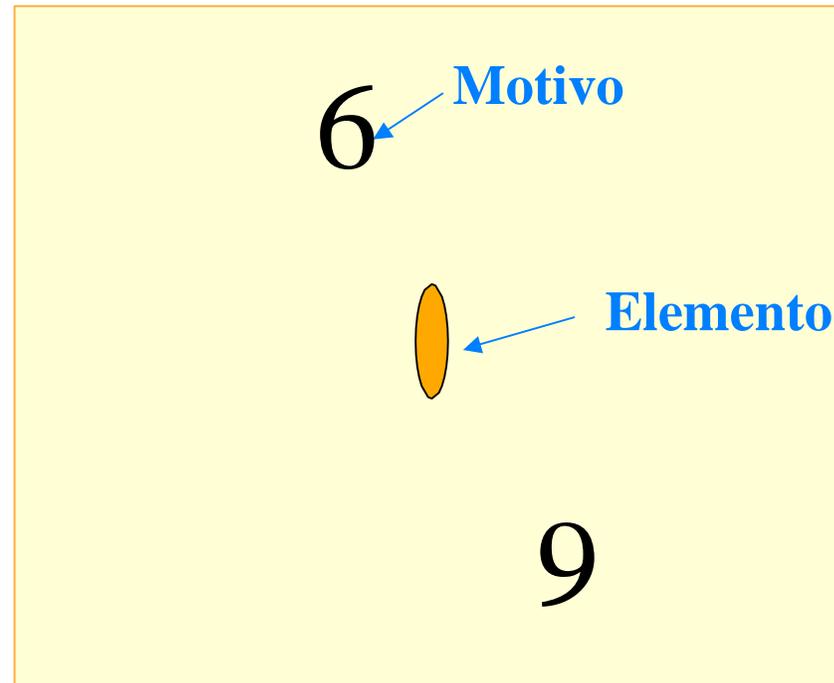
#### a. Rotação Binária

=  $360^\circ/2$  rotação

Reproduzir  
motivo em  
padrão  
simétrico

 = símbolo rotação binária

Operação



# SIMETRIA 2-D

## Elementos Simetria

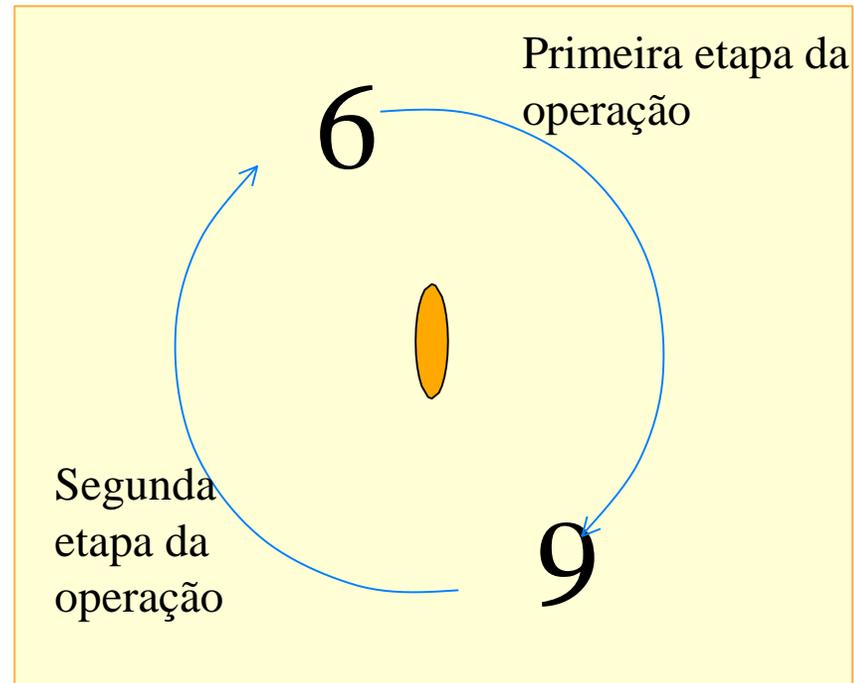
### 1. Rotação

#### a. Rotação Binária

= 360°/2 rotação

Reproduzir  
motivo em  
padrão  
simétrico

 = símbolo rotação binária



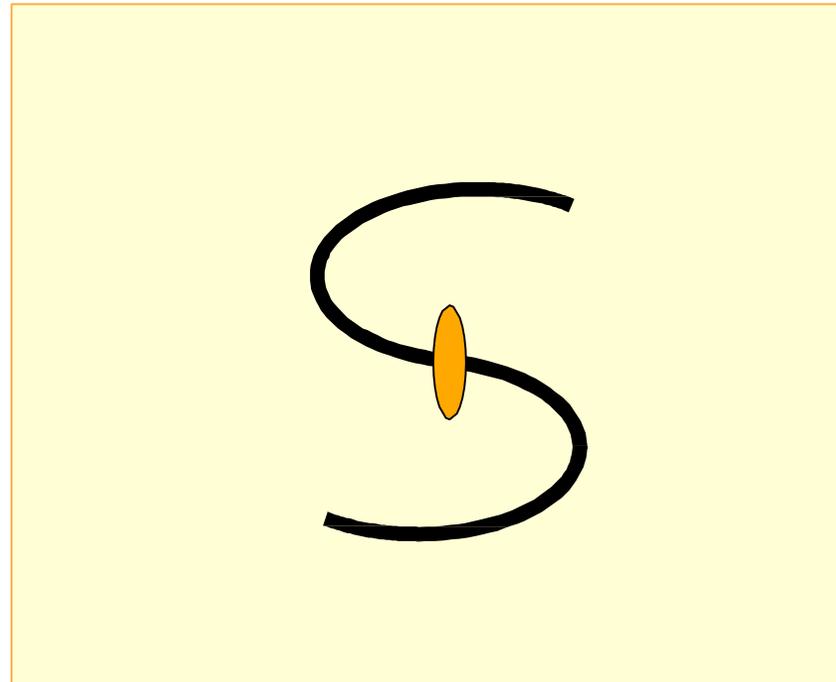
# SIMETRIA 2-D

## Elementos Simetria

### 1. Rotação

#### a. Rotação Binária

Alguns objetos  
possuem uma  
simetria  
intrínseca



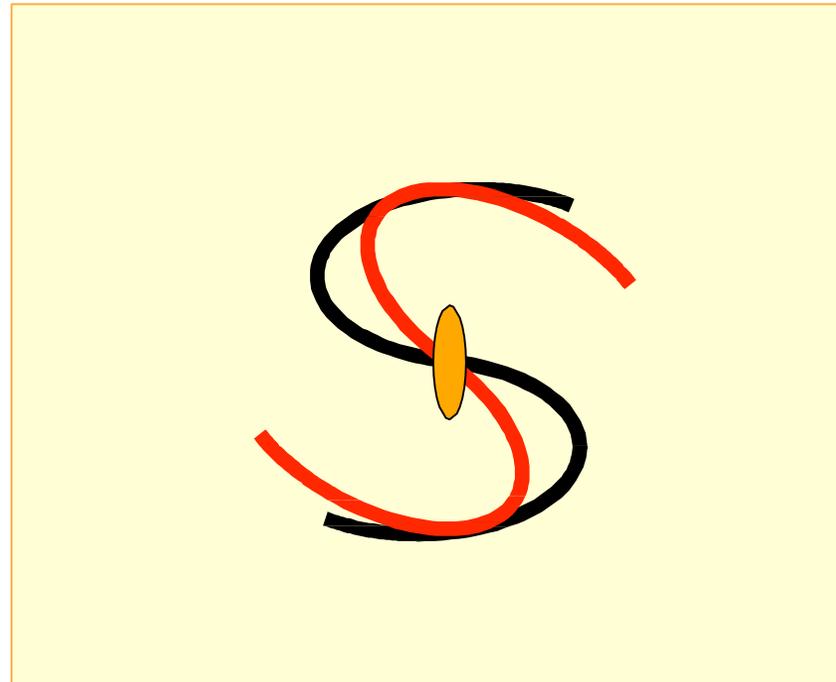
# SIMETRIA 2-D

## Elementos Simetria

### 1. Rotação

#### a. Rotação Binária

Alguns objetos  
possuem uma  
simetria  
intrínseca



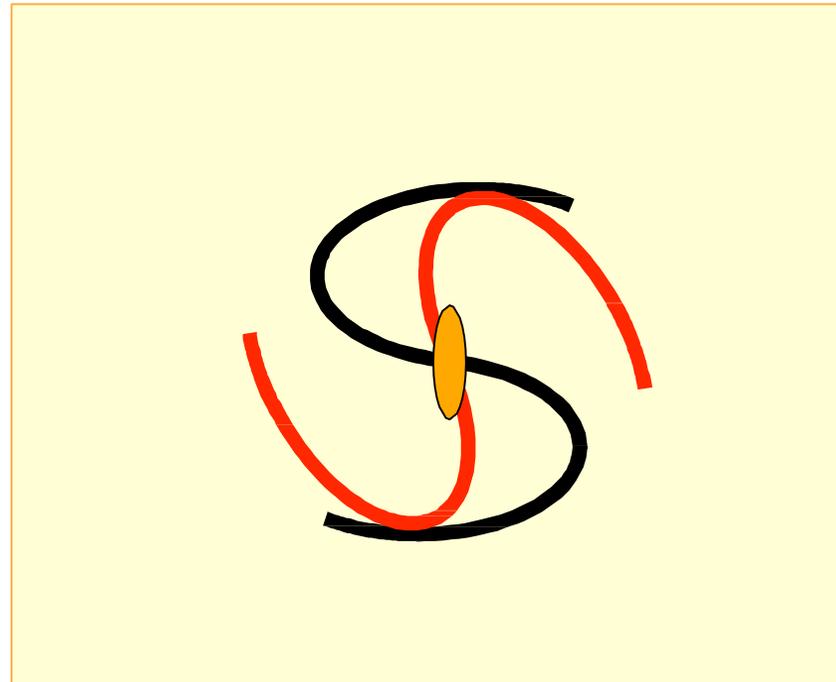
# SIMETRIA 2-D

## Elementos Simetria

### 1. Rotação

#### a. Rotação Binária

Alguns objetos  
possuem uma  
simetria  
intrínseca



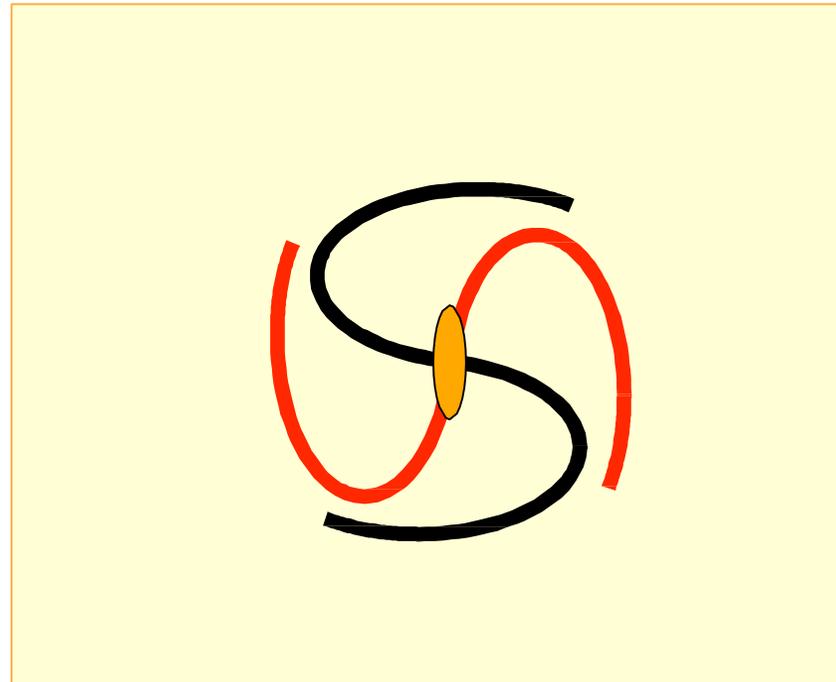
# SIMETRIA 2-D

## Elementos Simetria

### 1. Rotação

#### a. Rotação Binária

Alguns objetos  
possuem uma  
simetria  
intrínseca



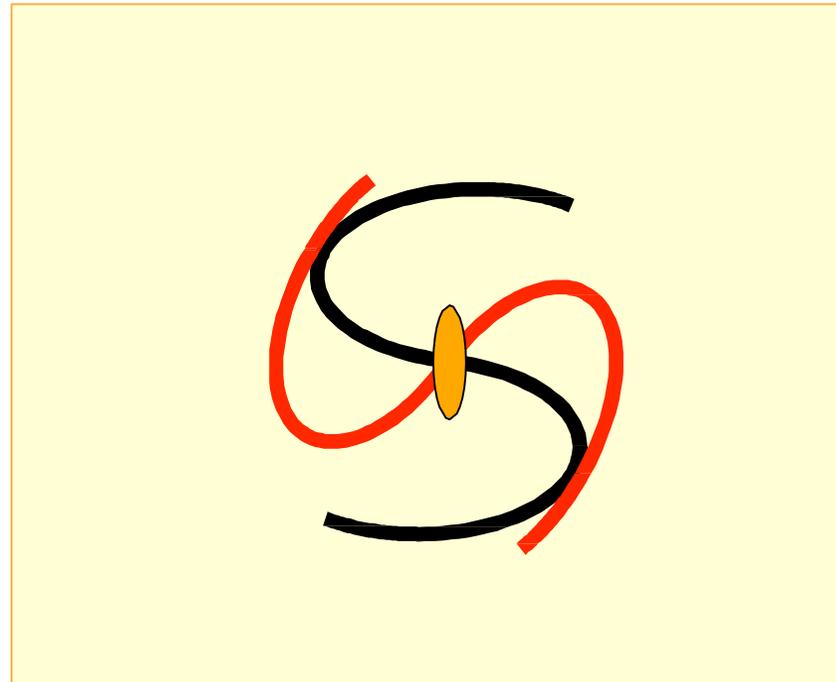
# SIMETRIA 2-D

## Elementos Simetria

### 1. Rotação

#### a. Rotação Binária

Alguns objetos  
possuem uma  
simetria  
intrínseca

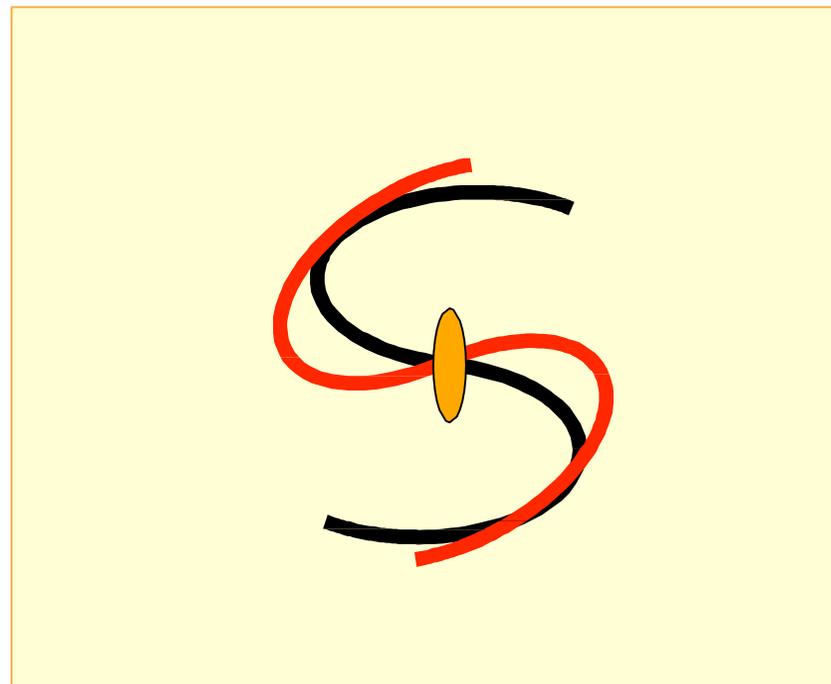


## Elementos Simetria

### 1. Rotação

#### a. Rotação Binária

Alguns objetos  
possuem uma  
simetria  
intrínseca



# SIMETRIA 2-D

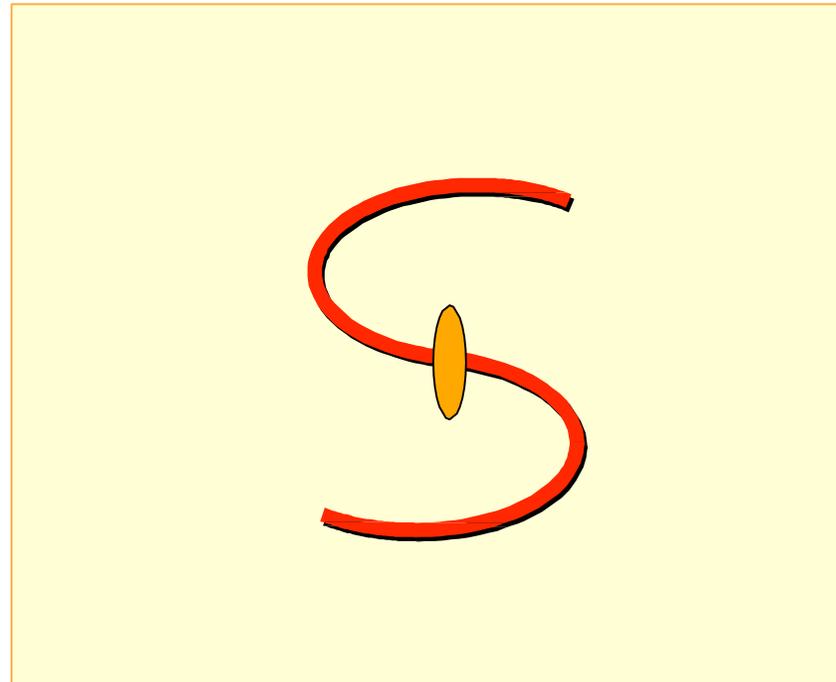
## Elementos Simetria

### 1. Rotação

#### a. Rotação Binária

Alguns objetos  
possuem uma  
simetria  
intrínseca

Rotação em  $180^\circ$  faz com que o  
objeto coincida, segunda rotação  
em  $180^\circ$  retorna o objeto à  
posição original



# SIMETRIA 2-D

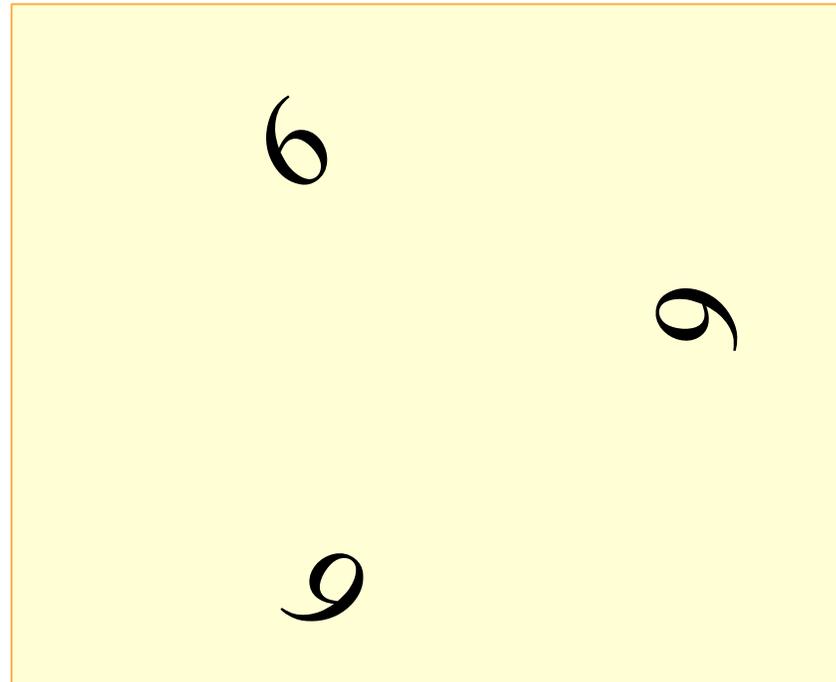
## Elementos Simetria

### 1. Rotação

#### b. Rotação ternária

=  $360^\circ/3$  rotation

Reproduzir  
motivo em  
padrão simétrico



# SIMETRIA 2-D

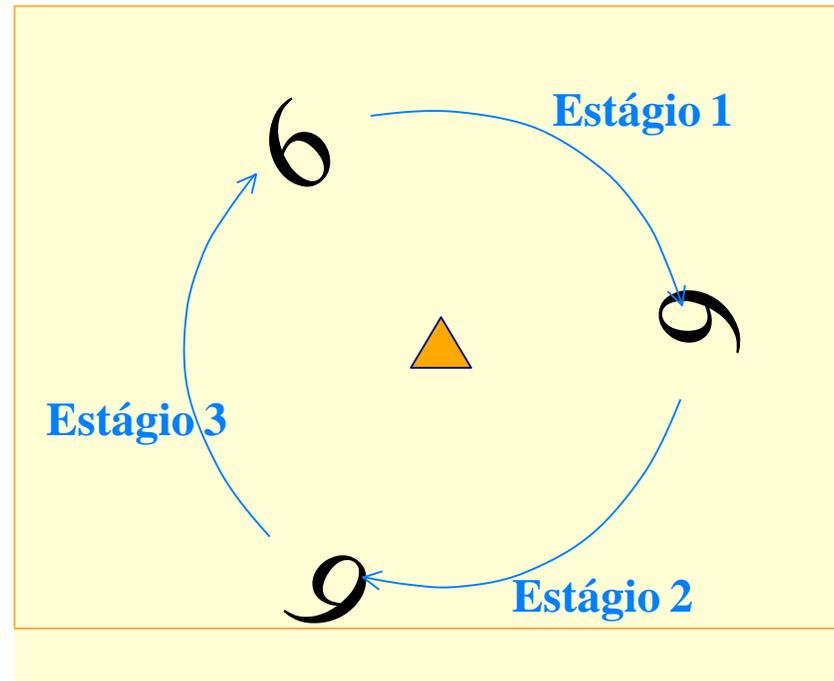
## Elementos Simetria

### 1. Rotação

#### b. Rotação ternária

=  $360^\circ/3$  rotation

Reproduzir  
motivo em  
padrão simétrico



# SIMETRIA 2-D

Duas dimensões

**Rotação: eixo quaternário**

Operação

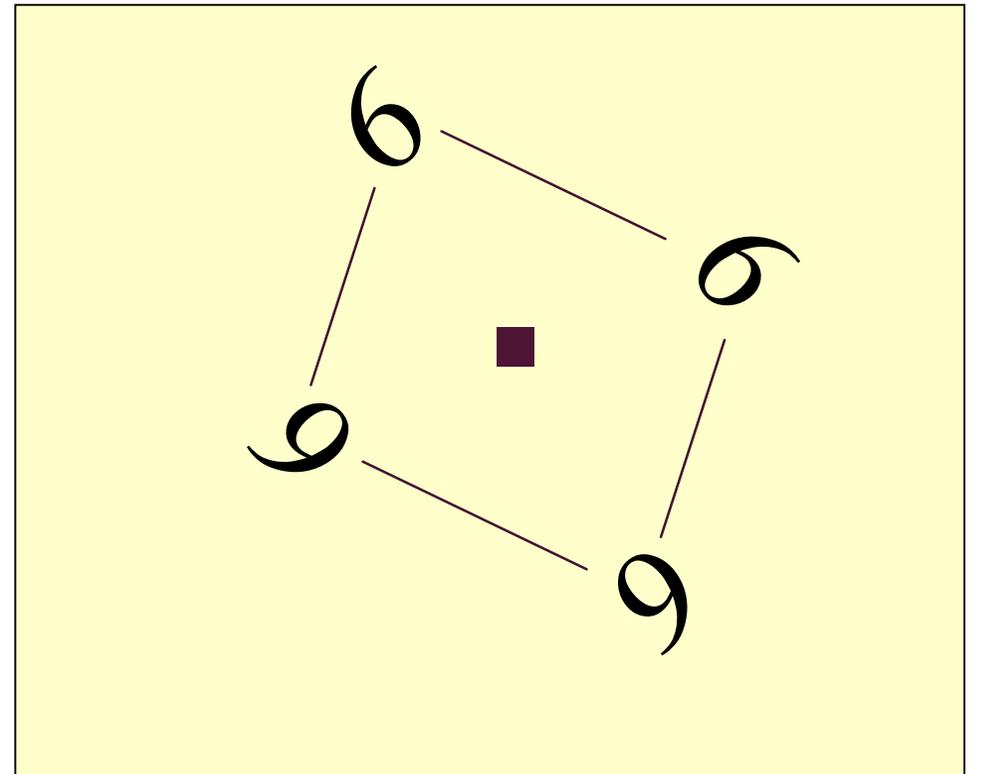
$360^\circ/4$  rotação



Símbolo para  
eixo quaternário



FONTE: Chvátal, 2007



# SIMETRIA 2-D

Duas dimensões

Rotação: eixo senário

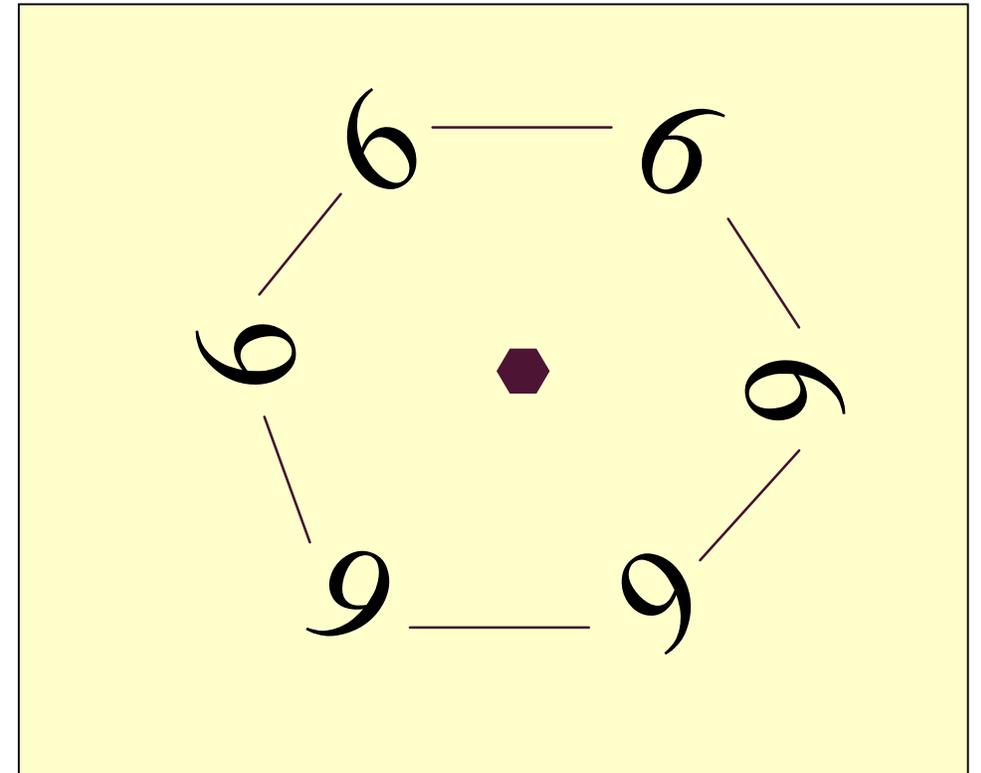


Operação

$360^\circ/6$  rotações



Símbolo para eixo senário

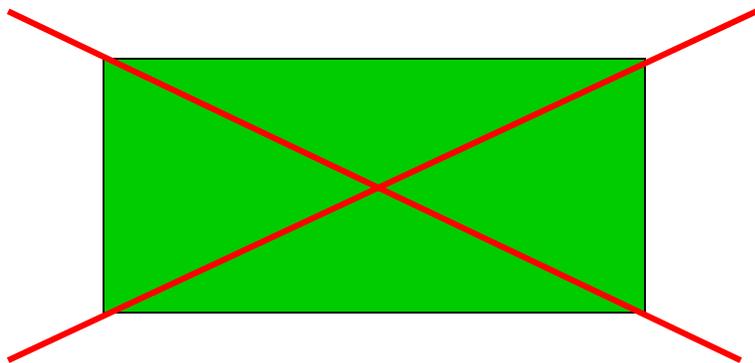


# Rotações

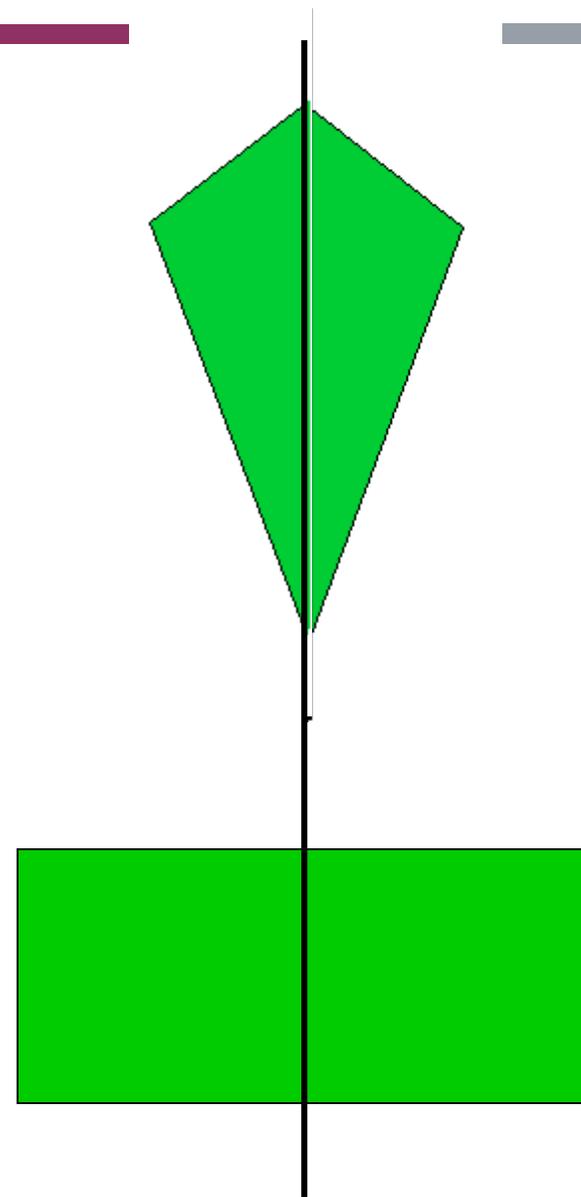
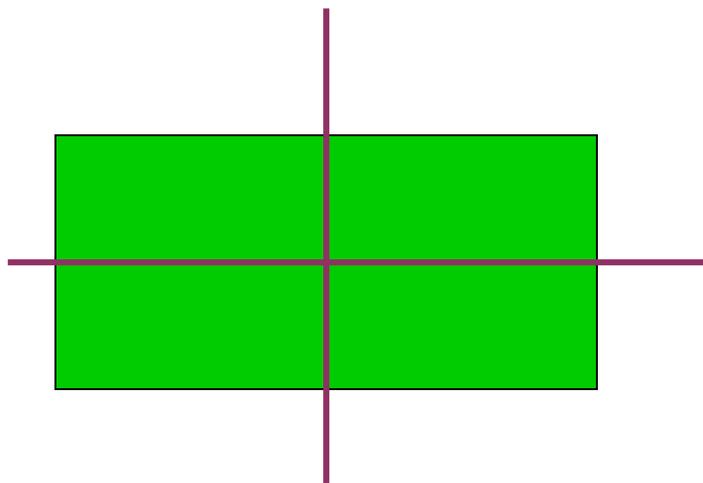
6	6	6	6	6
				
	9	9	9	9
unário	binário	ternário	quarternário	senário
símbolo				

---

Planos 1 e 2

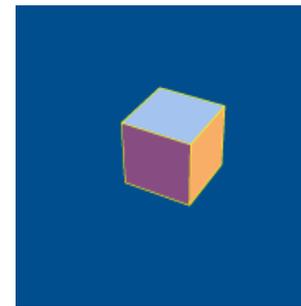
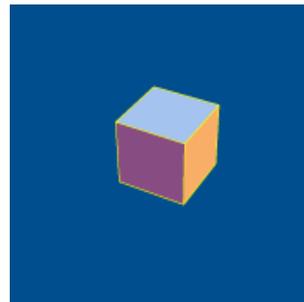
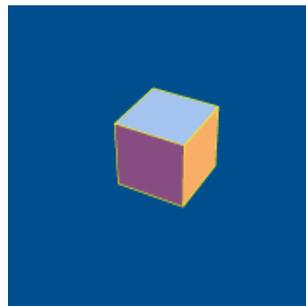
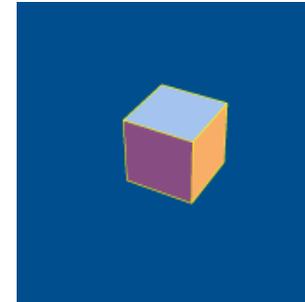
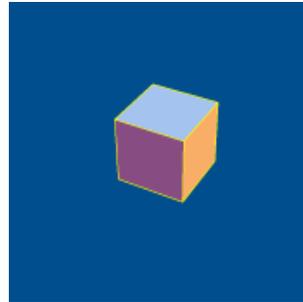
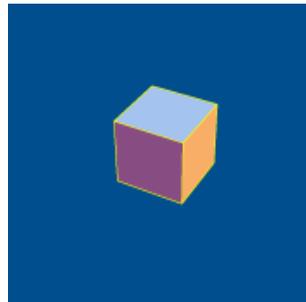
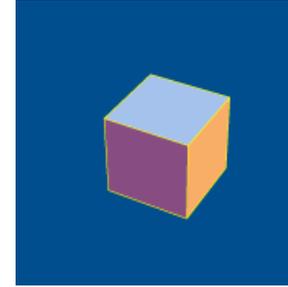
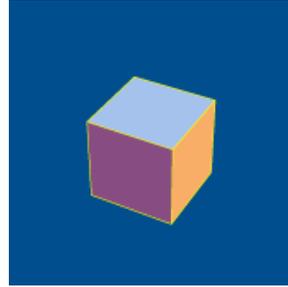
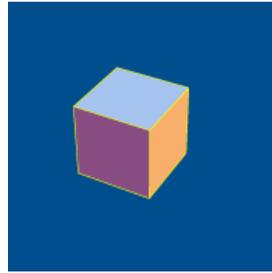


Planos 3 e 4

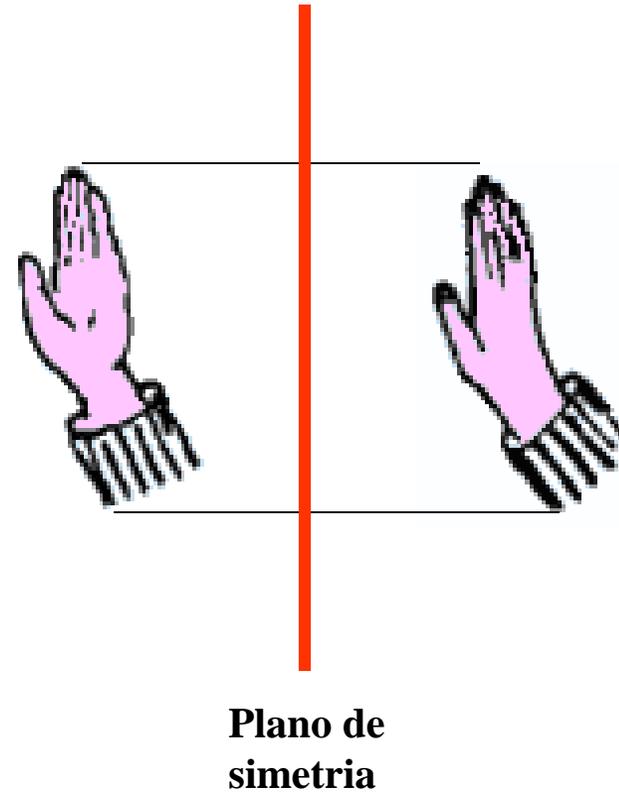
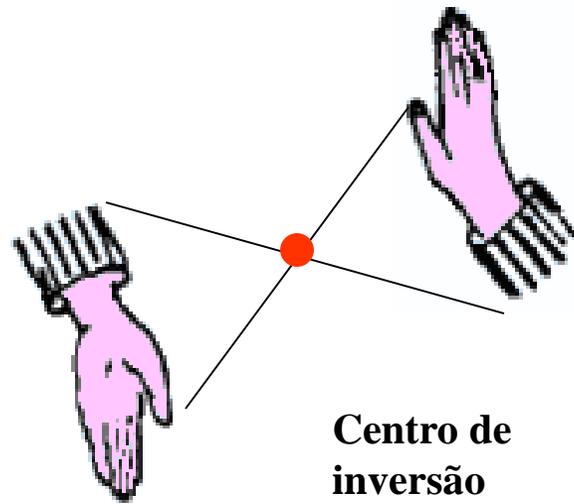


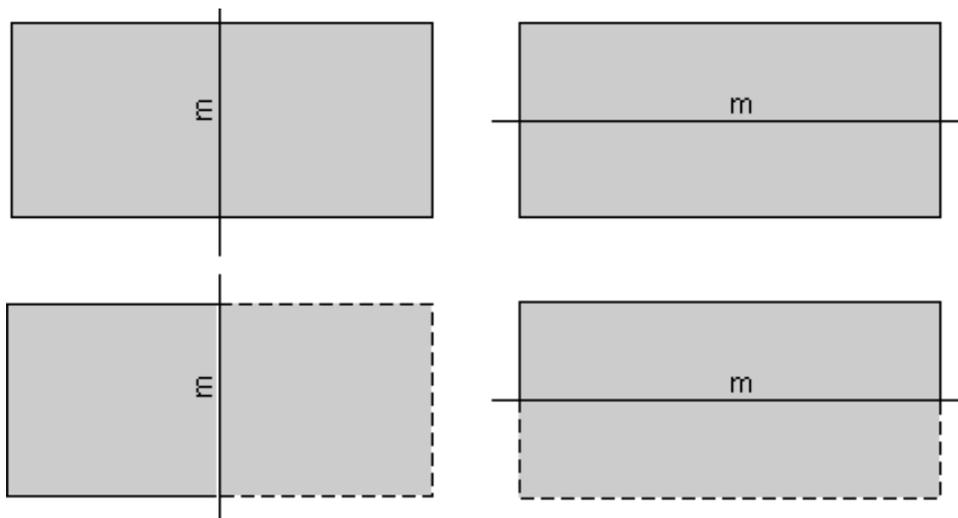
espelho

Um cubo possui 9 (nove) planos de simetria.

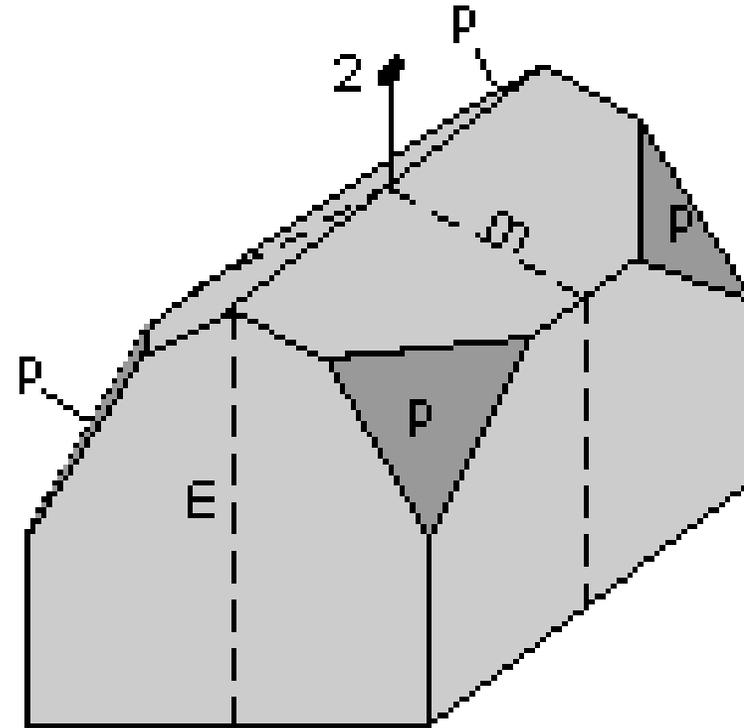
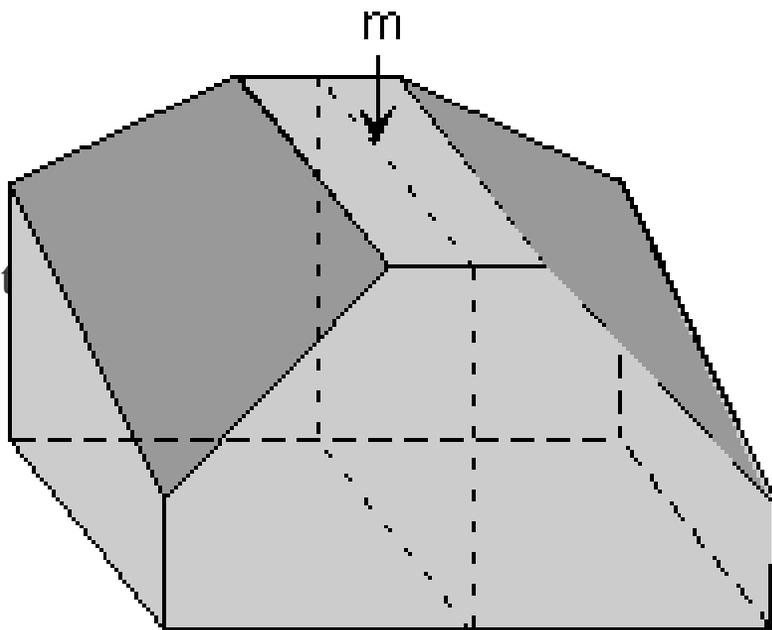


## O plano e o centro de simetria geram enantiomeros



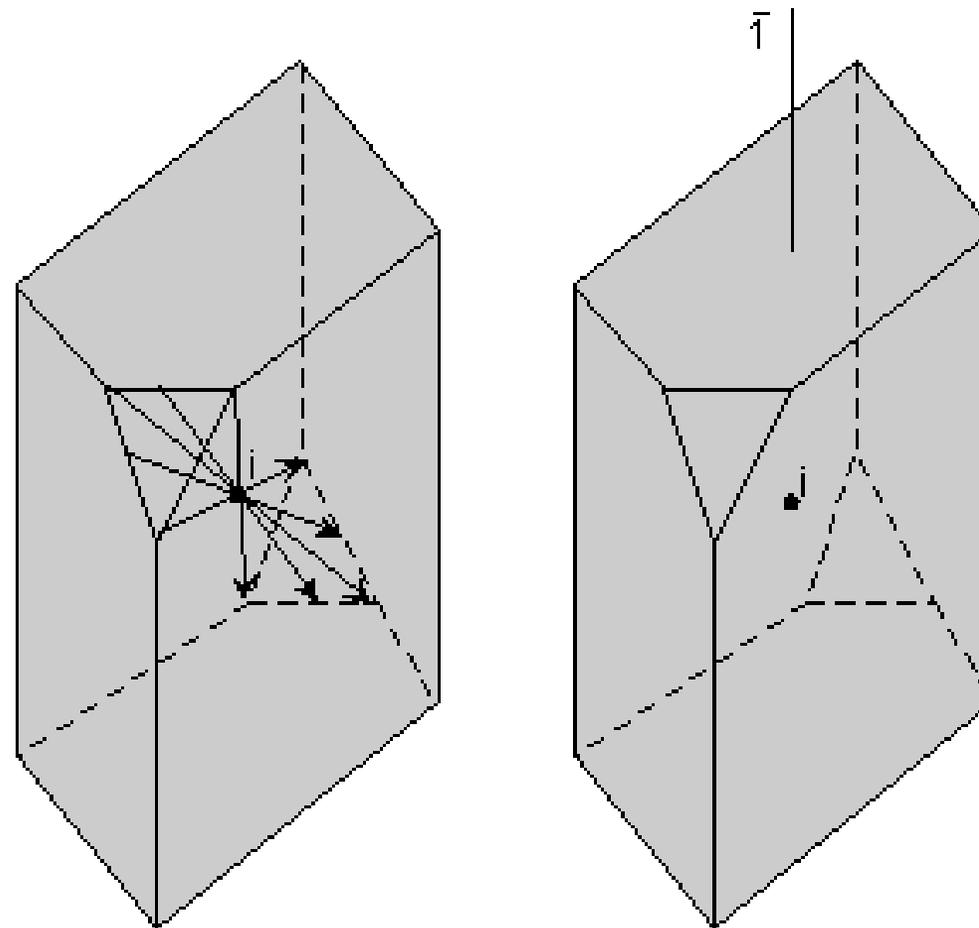


Planos de simetria



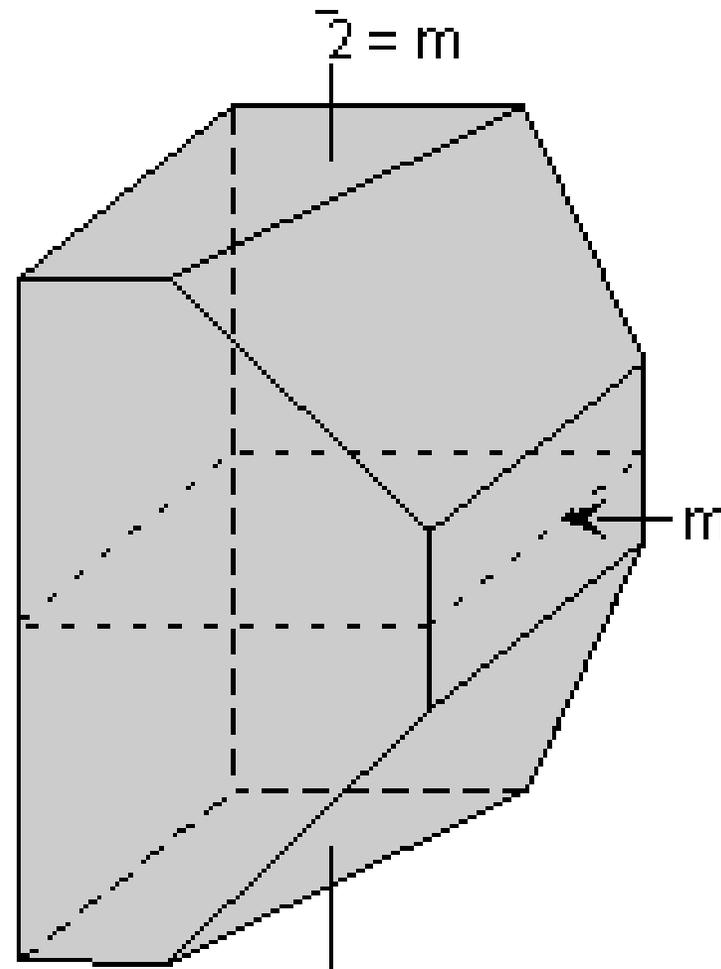
Centro de simetria ( $i$ )

$$E = i$$



$E \quad \theta = 180^\circ + \text{invers\~{a}o}$

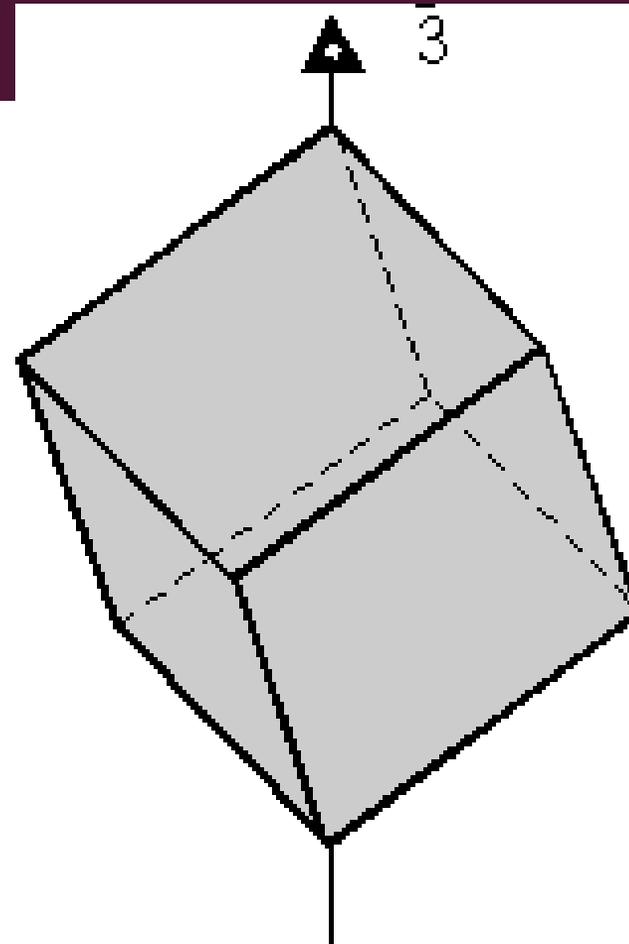
$\bar{2}$



$\bar{3}$

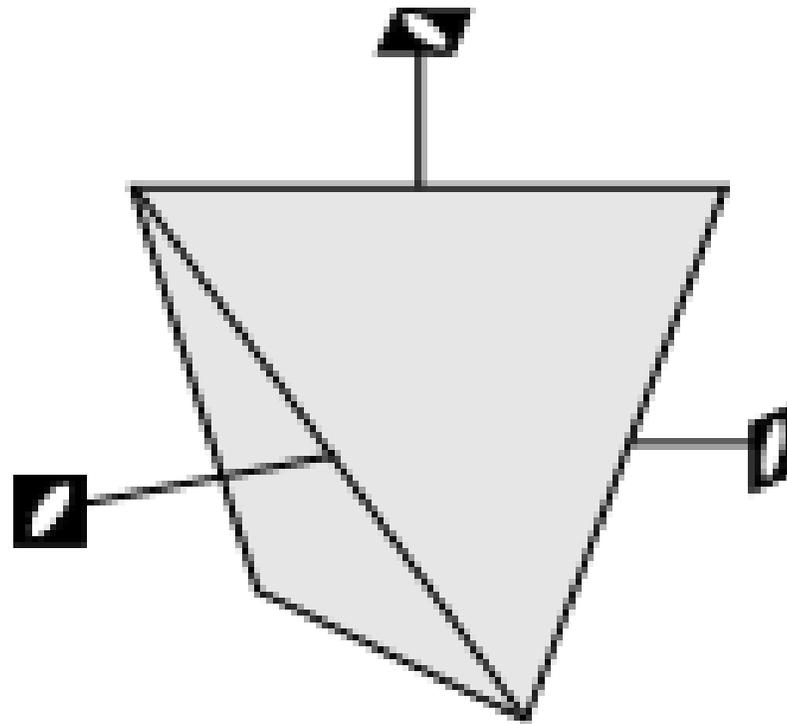
E  $\theta = 120^\circ + \text{invers\~{a}o}$

$= E_3 + i$



4

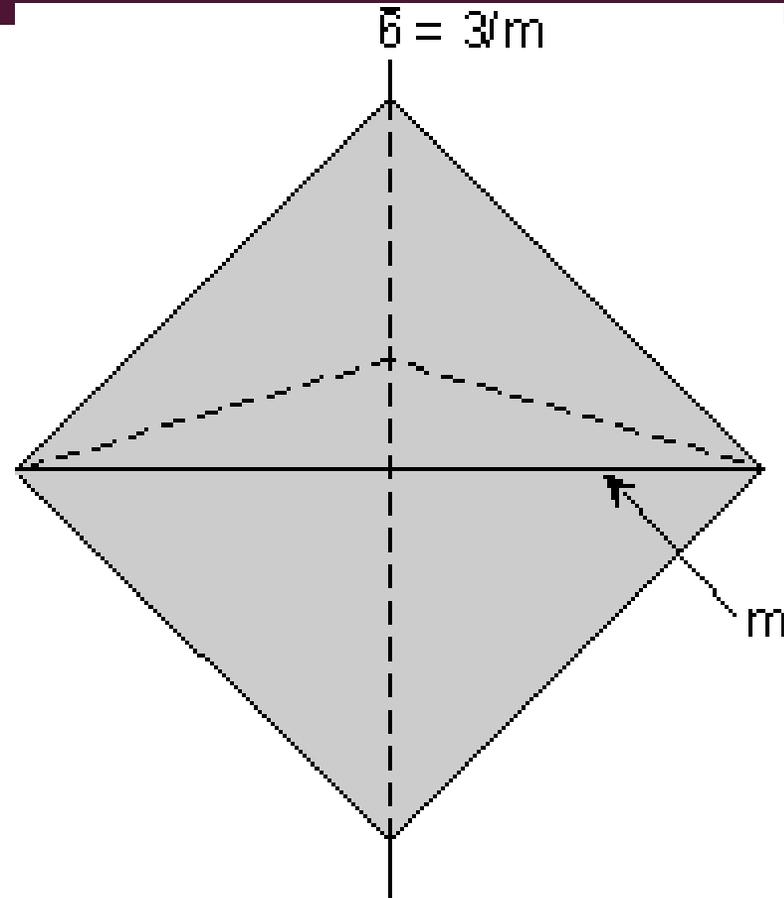
E  $\theta = 90^\circ + \text{invers\~{a}o}$



$\bar{6}$

E  $\theta = 60^\circ +$  inversão  
 $\bar{6}$

Obs: E = E<sub>3</sub>/m



Eixos  
Impróprios:

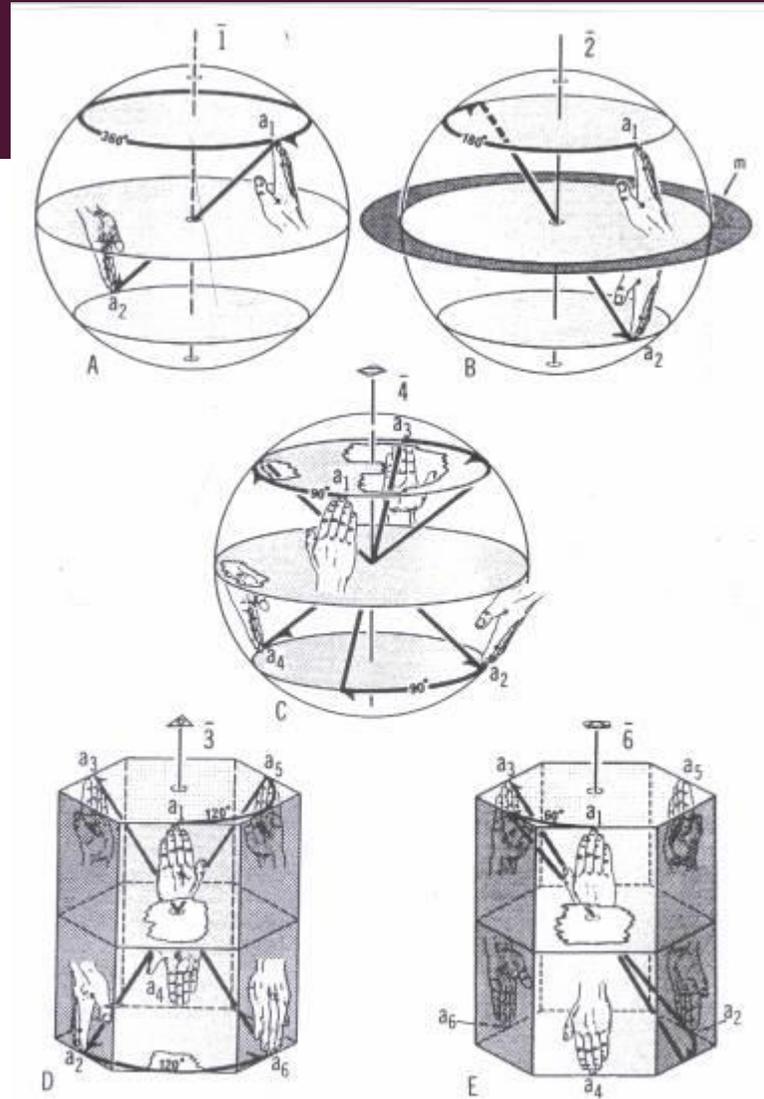
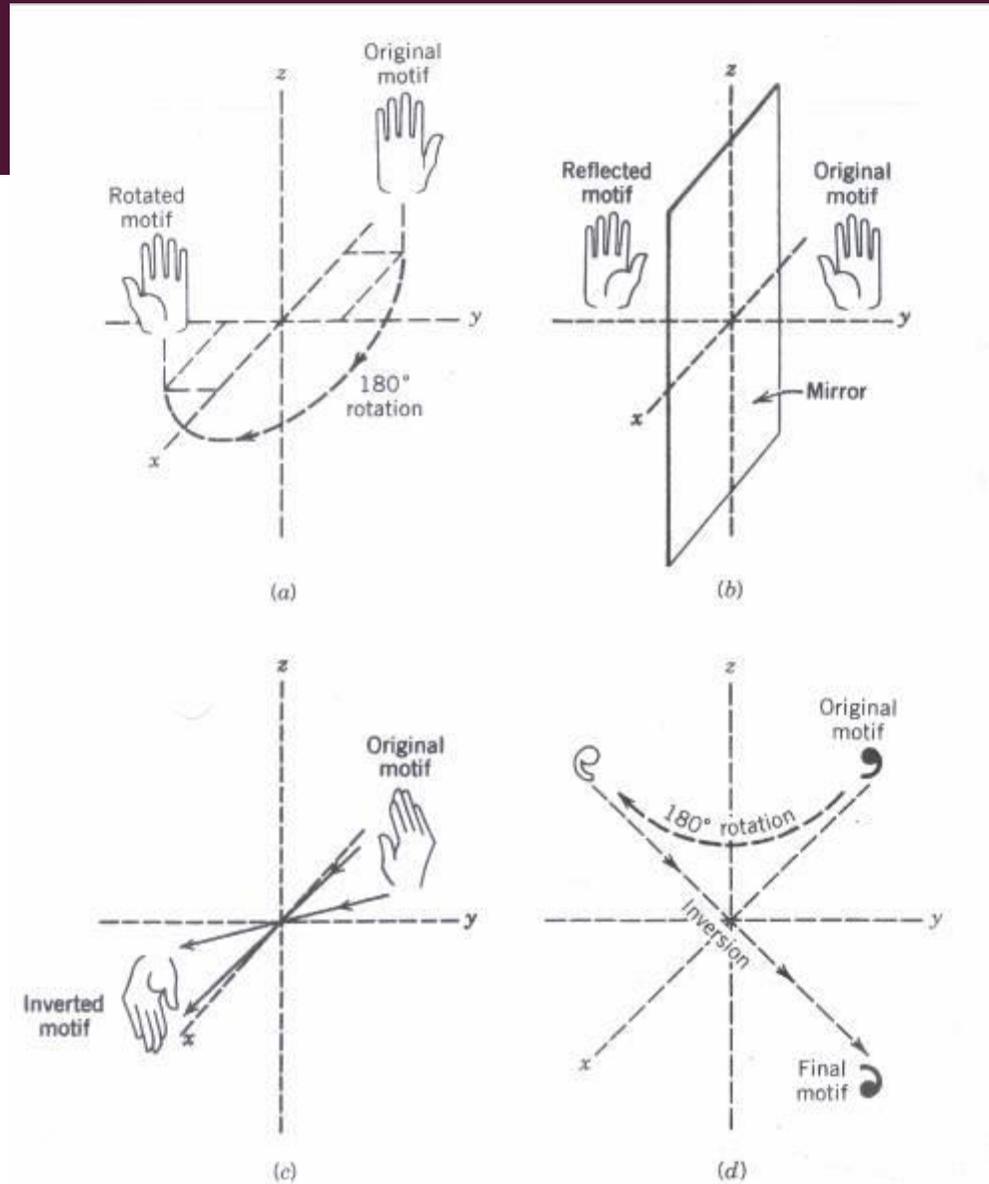


FIGURE 1-7

Eixo  $E_2$  (a), plano de simetria =  $m$  (b),  
centro de simetria =  $i$  (c)  
e  $E_2$  impróprio =  $m$  (d)

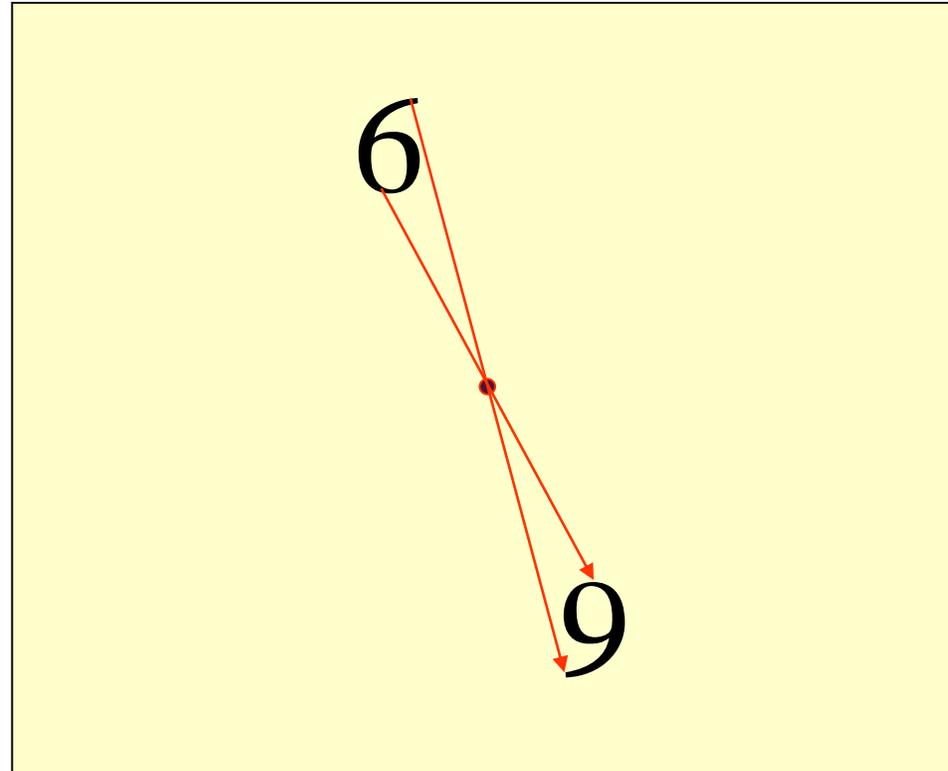


# OPERAÇÃO: INVERSÃO ( $i$ )

= rotação em torno de um eixo, combinada com inversão (inversão rotatória)

= igual rotação binária em 2 D (não existe em 2D, mas é único em 3 D)

● Símbolo para inversão  $i$

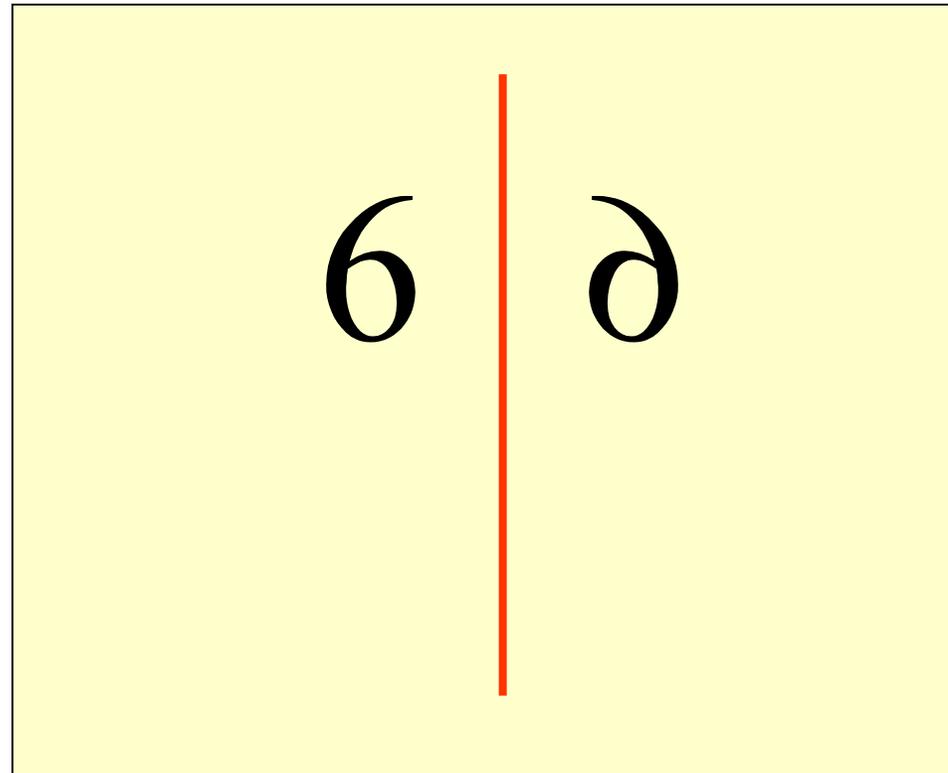


# OPERAÇÃO: REFLEXÃO (m)

Reflexão sobre um plano (igual espelho)



Símbolo  
para  
reflexão  
*m* (mirror)



Em **duas** dimensões: Há seis operações possíveis

1 2 3 4 6 m ( $i = 2$  em 2D)

= Símbolos Hermann-Mauguin

Carl Hermann



Rotações são congruentes  
(reproduções são idênticos)

Inversões e reflexões são enantiomórficos  
(reproduções são opostos)

# COMBINAÇÃO DE OPERAÇÕES (em 2 D)

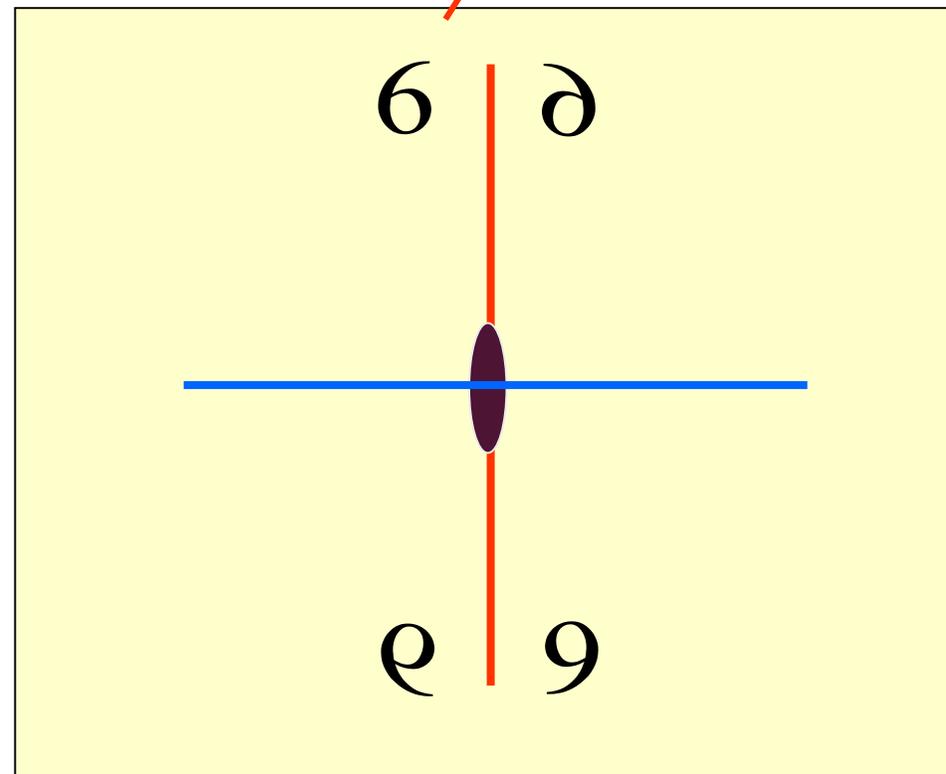


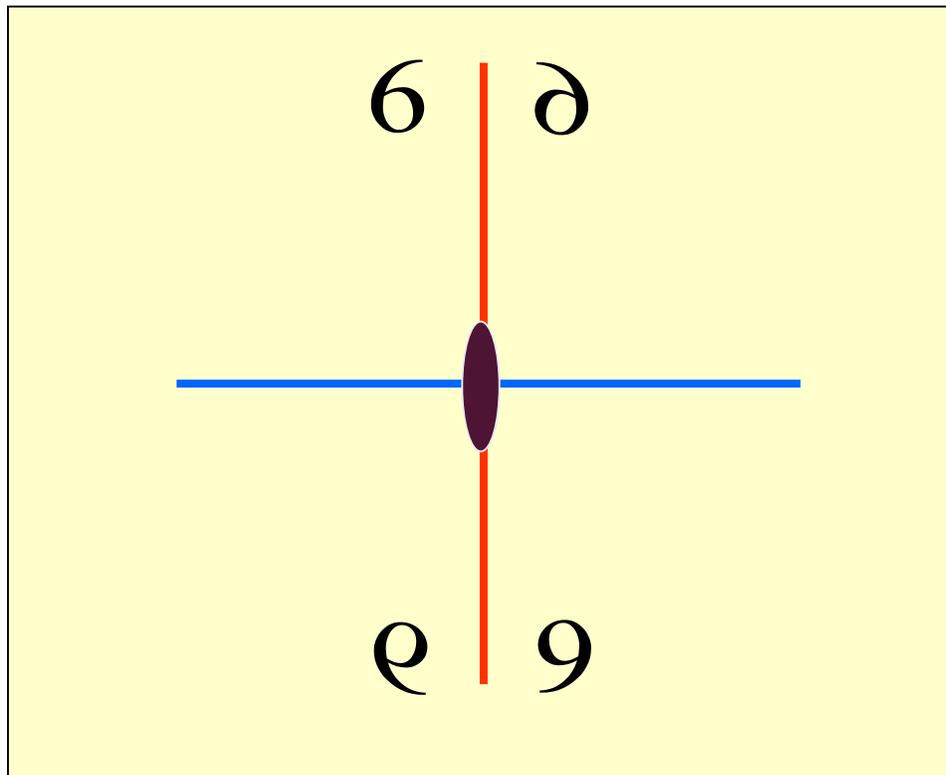
Passo 1:  
reflexão

Passo 2:  
Rotação (tudo !)

Mais ?!

É **preciso** mais  
uma reflexão !



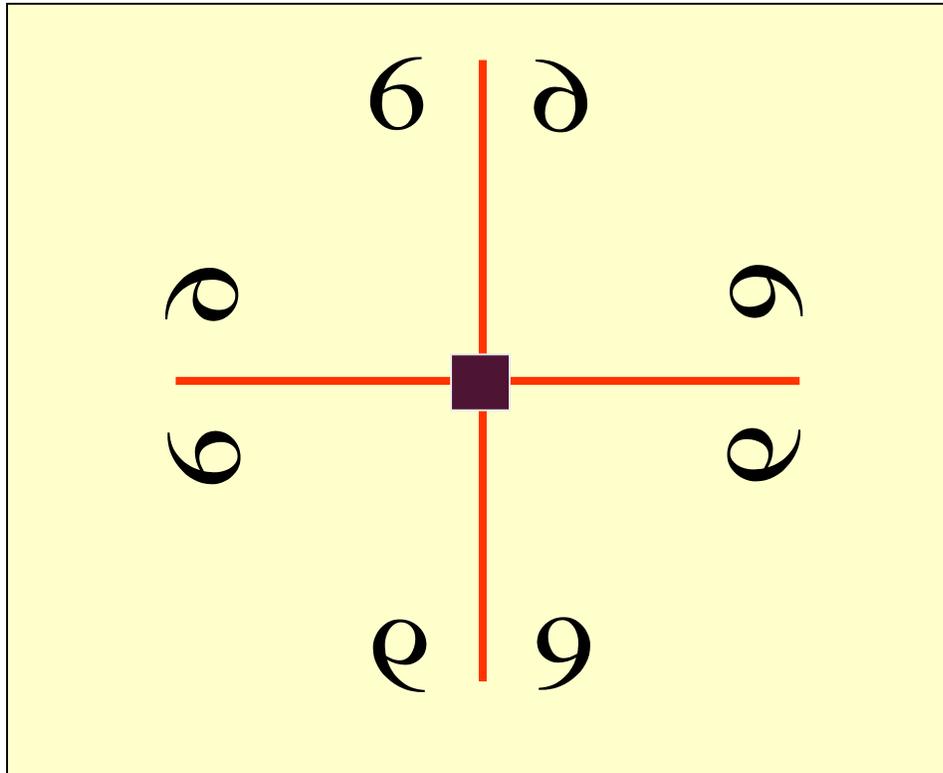


✓ duas reflexões  $m$

✓ um eixo binário

✓ **2mm**

## 8 faces



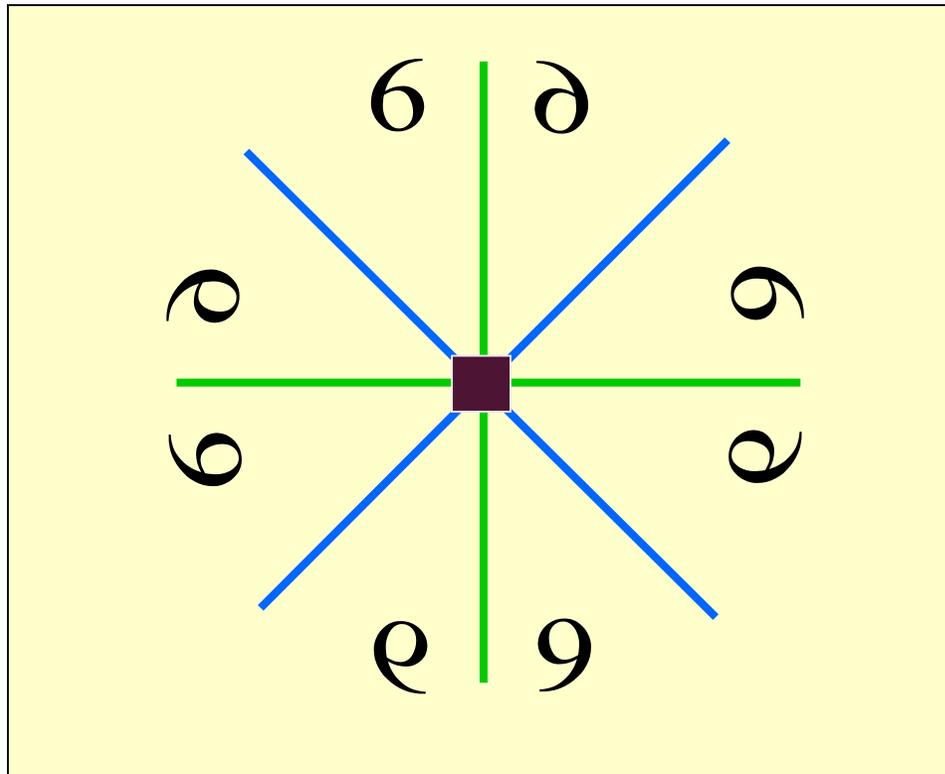
Passo 1:

reflexão

Passo 2:

rotação (3 vezes):  
eixo quaternário

Tem mais ?

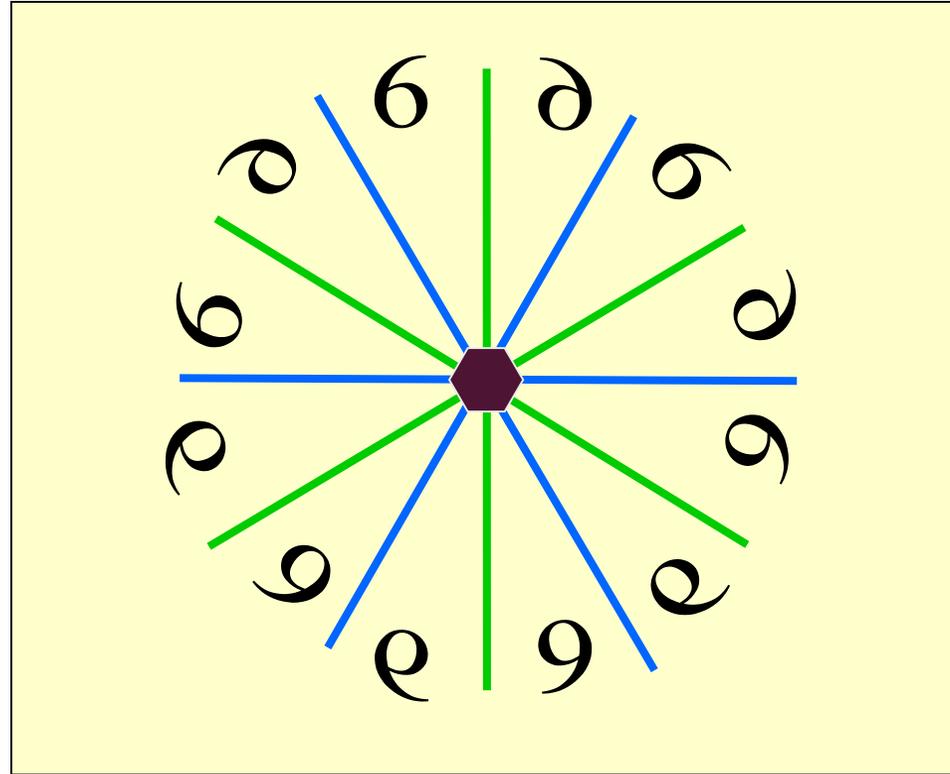


Tem !

Mais dois espelhos  
(duas reflexões)

Em fim: 4mm

12 faces



6mm

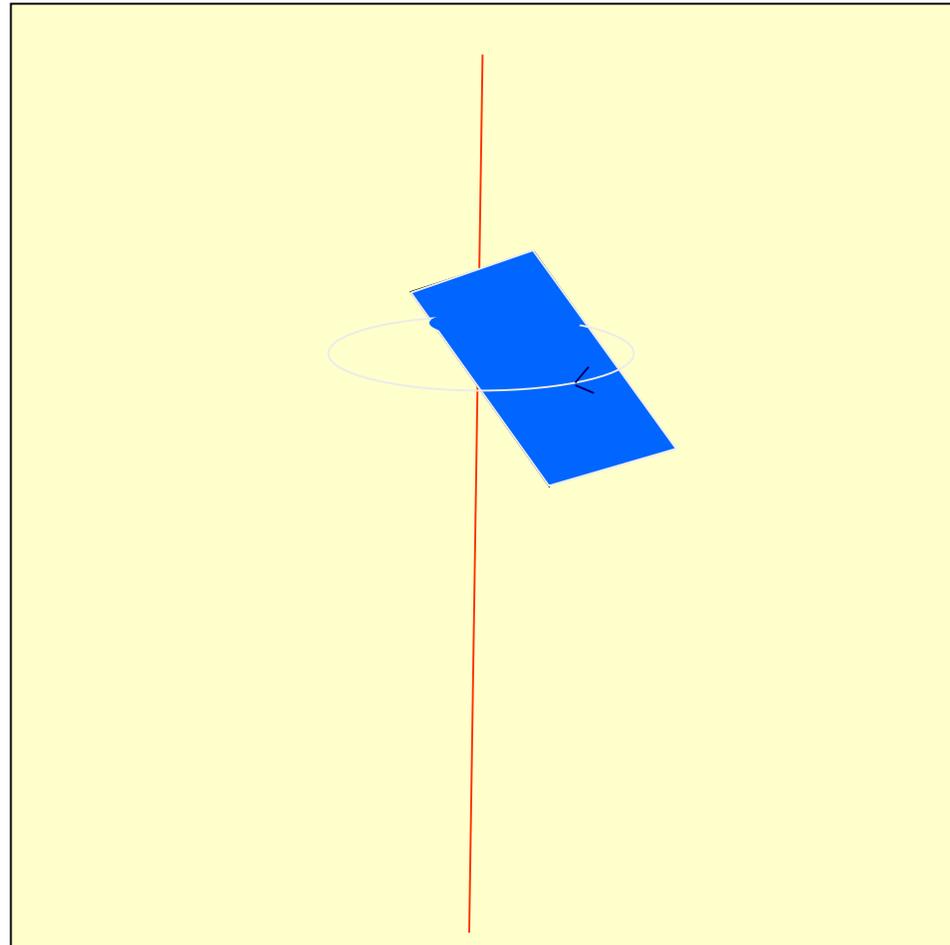


Inversão rotatória (“Rotoinversão”) **Símbolo:  $\bar{X}$**

= Rotação em torno de um eixo, combinada com inversão

1. Rotoinversão unária  $\bar{1}$

Rotação  $360^\circ/1$   
> identidade



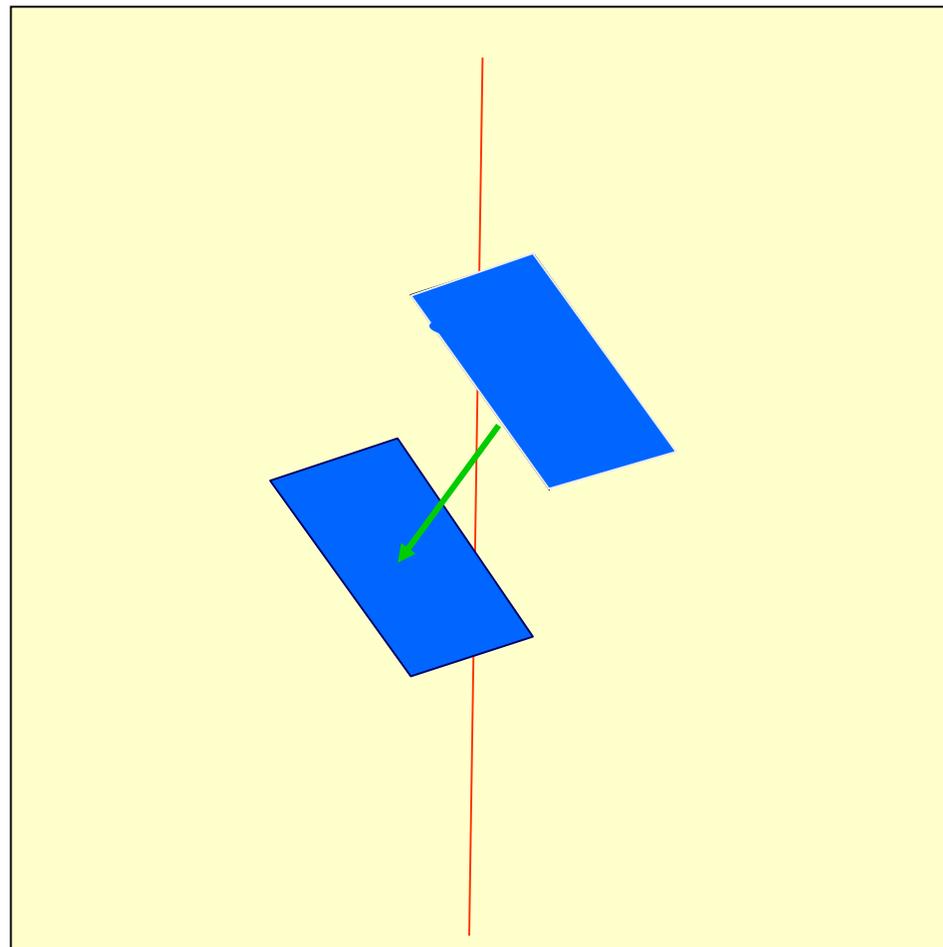
## Inversão rotatória (“Rotoinversão”)

### 1. Rotoinversão unária $\bar{1}$

Rotação  $360^\circ/1$

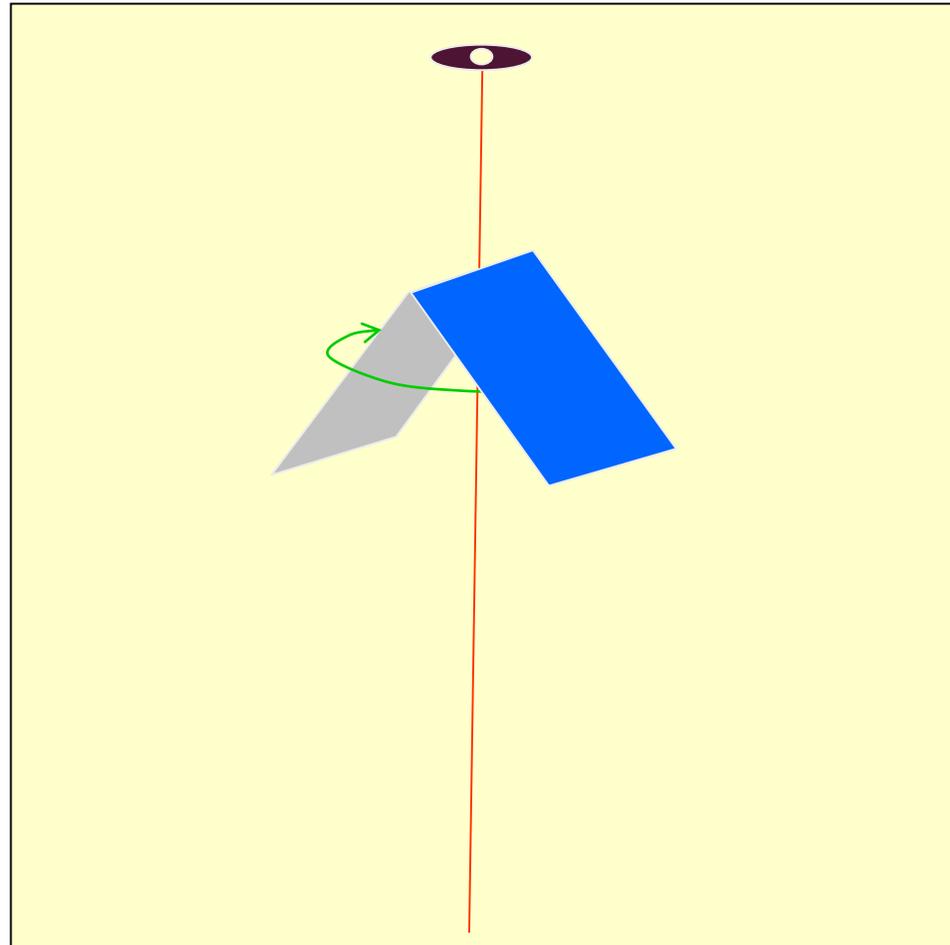
identidade

Inversão, é igual  
inversão  $i$ , portanto  
não é uma operação  
nova



## 2. Rotoinversão binária $\bar{2}$

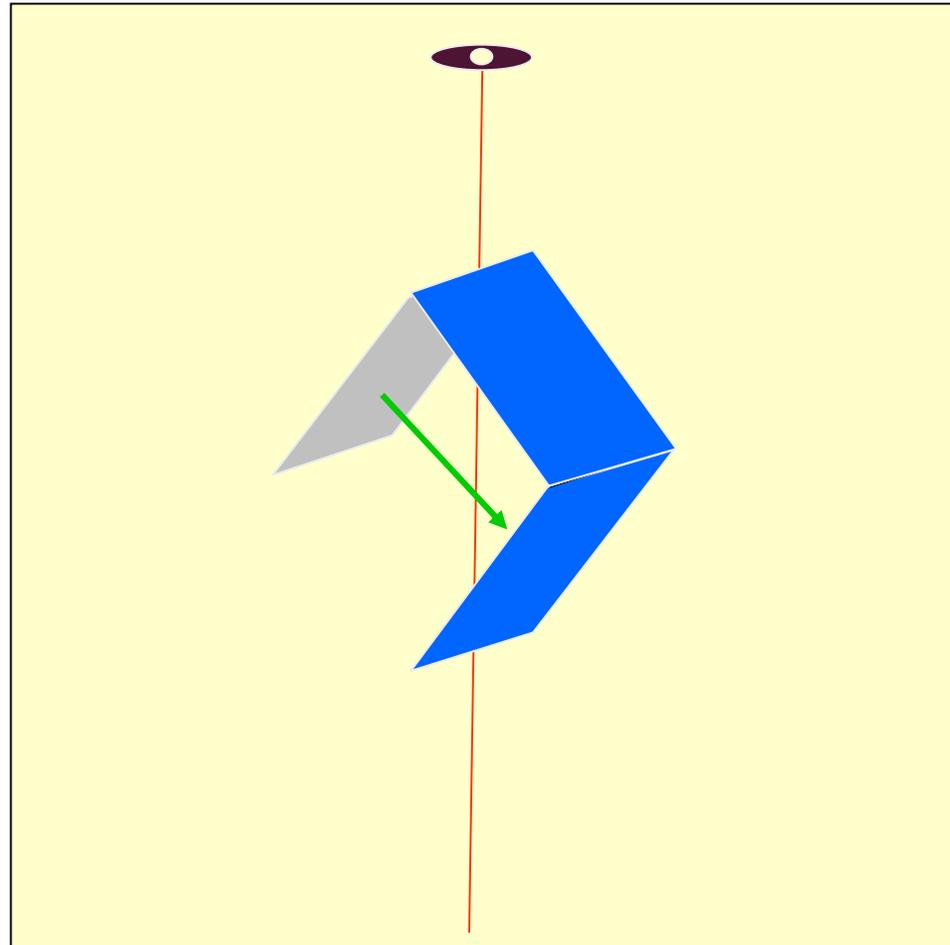
Rotação  $360^\circ/2$



## 2. Rotoinversão binária $\bar{2}$

Rotação  $360^\circ/2$

Inversão

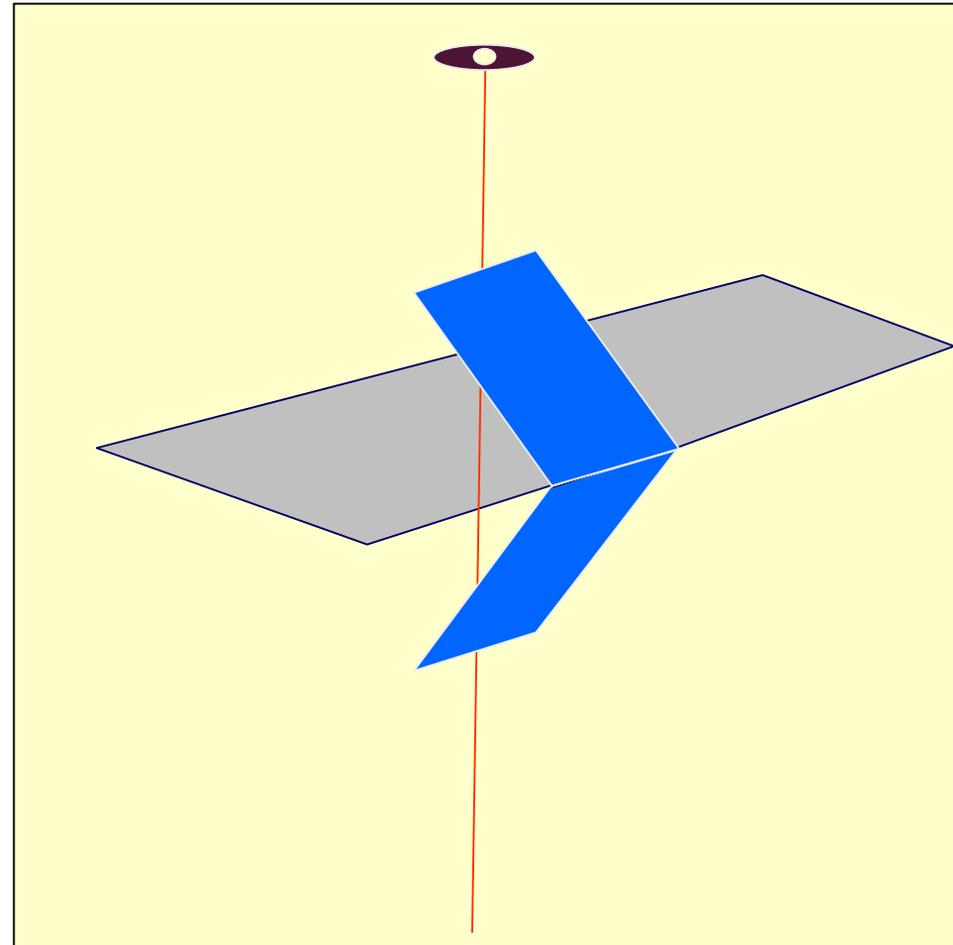


## 2. Rotoinversão binária $\bar{2}$

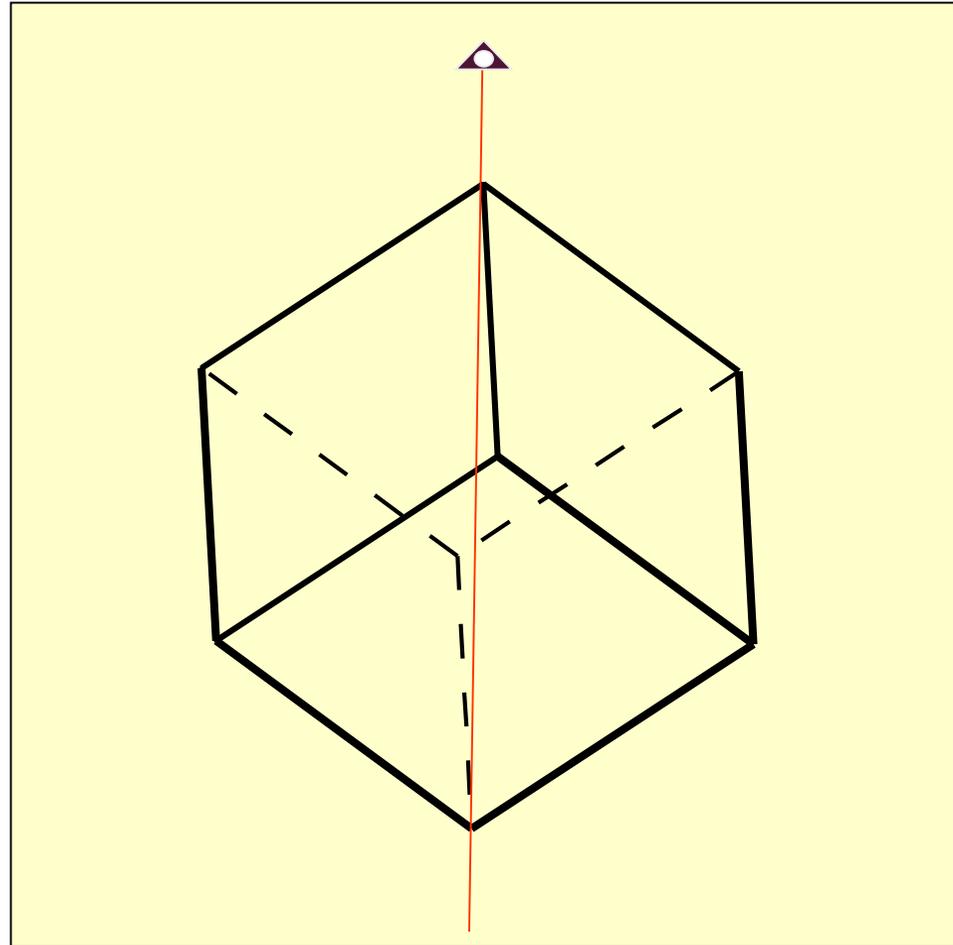
Rotação  $360^\circ/2$

Inversão

Resultado, mas é  
igual "m", portanto não  
é operação nova

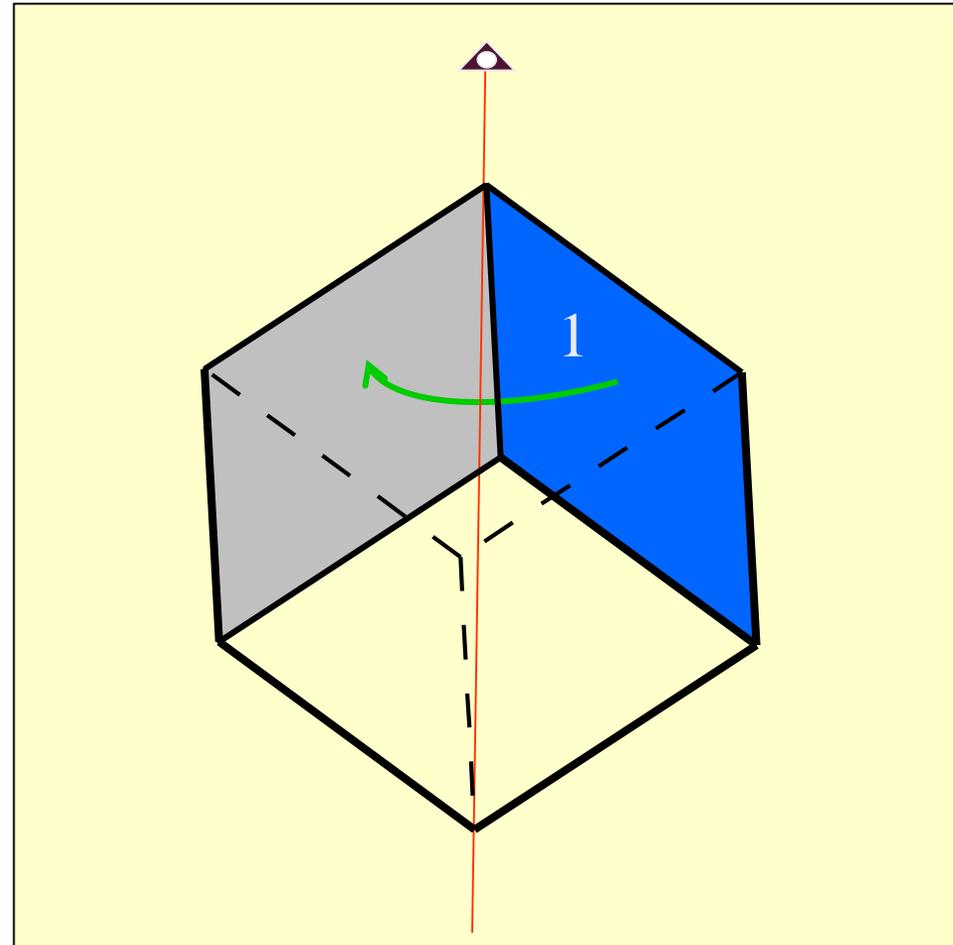


### 3. Rotoinversão ternária $\bar{3}$



### 3. Rotoinversão ternária $\bar{3}$

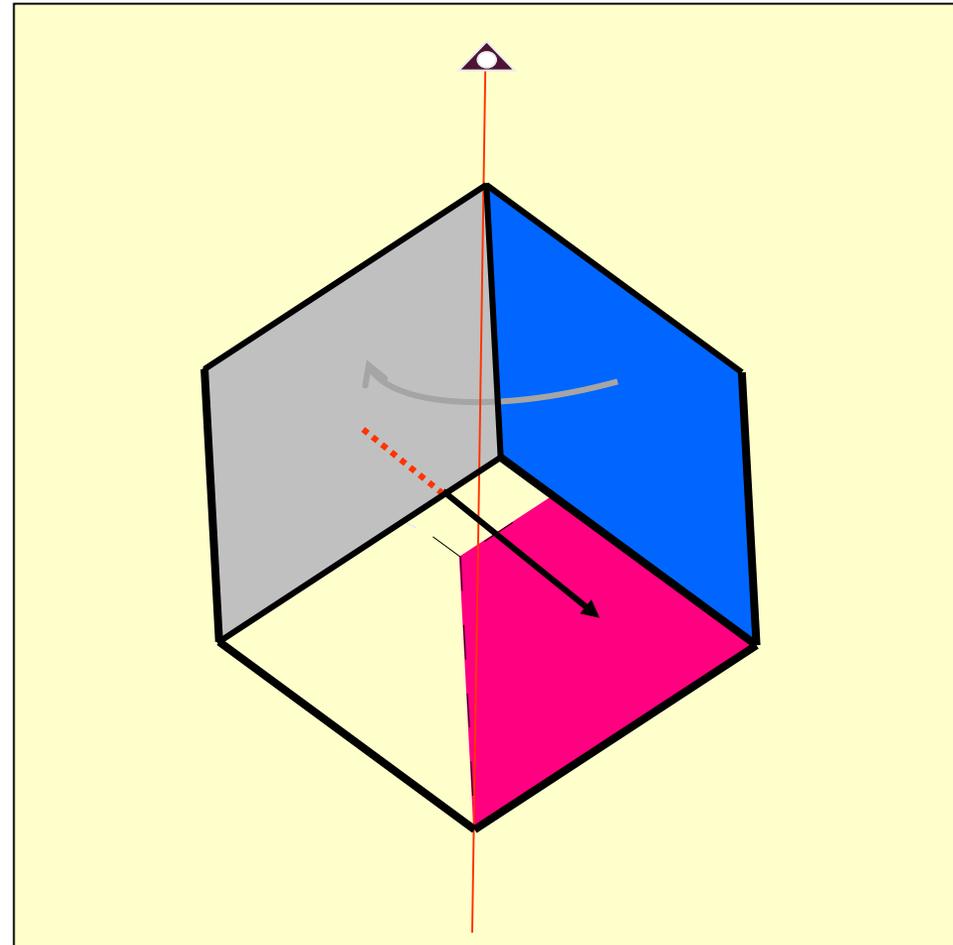
Rotação  $360^\circ/3$  (1)



### 3. Rotoinversão ternária $\bar{3}$

Rotação  $360^\circ/3$

Inversão pelo centro

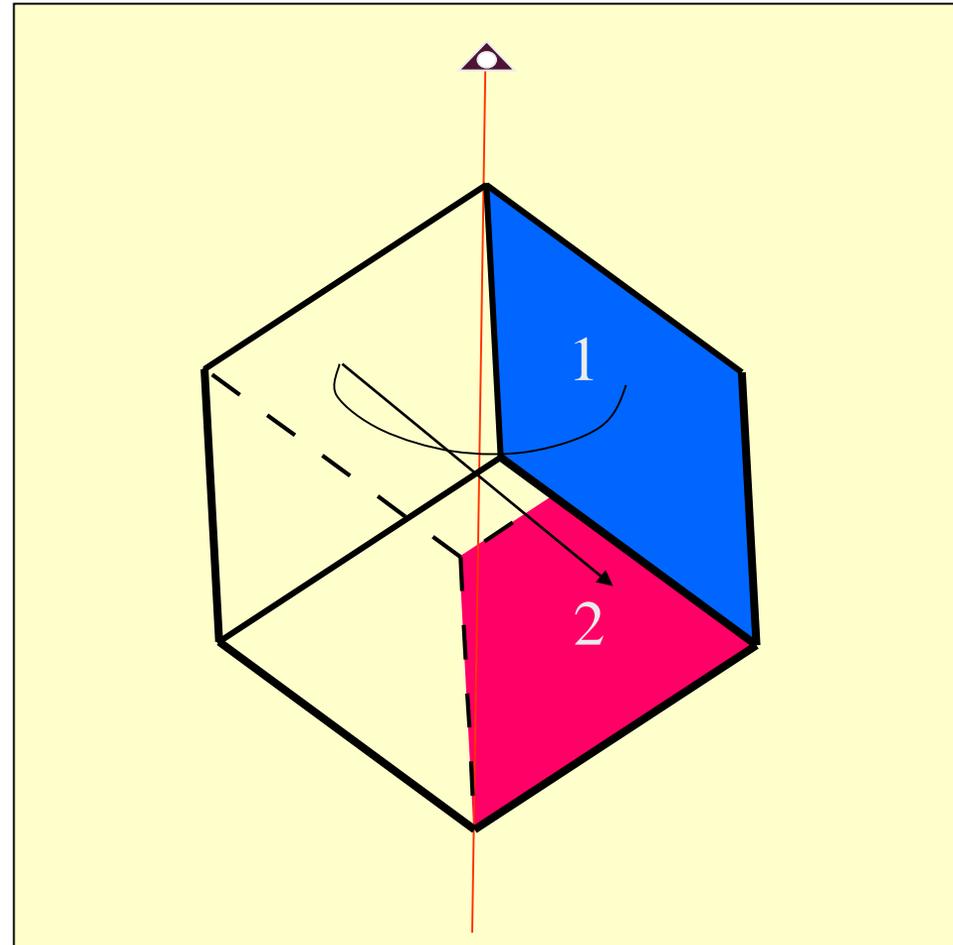


### 3. Rotoinversão ternária $\bar{3}$

Rotação  $360^\circ/3$  (1)

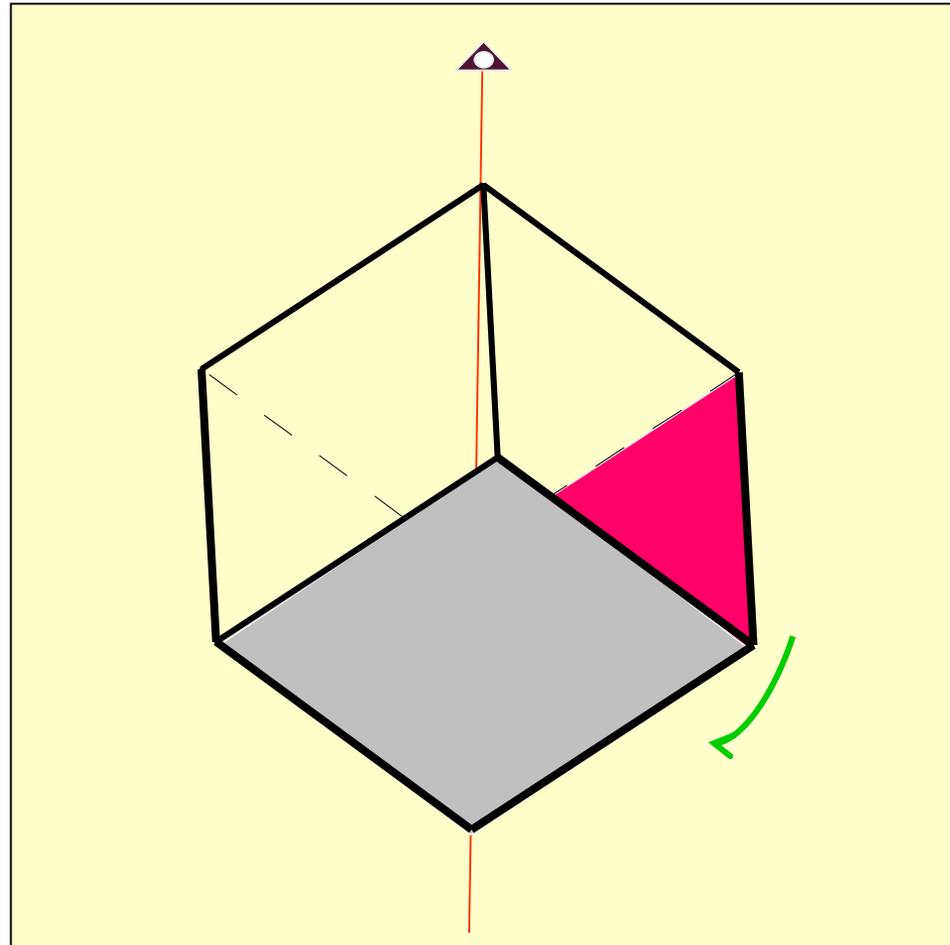
Inversão pelo centro

Resultado do primeiro passo (2)



### 3. Rotoinversão ternária $\bar{3}$

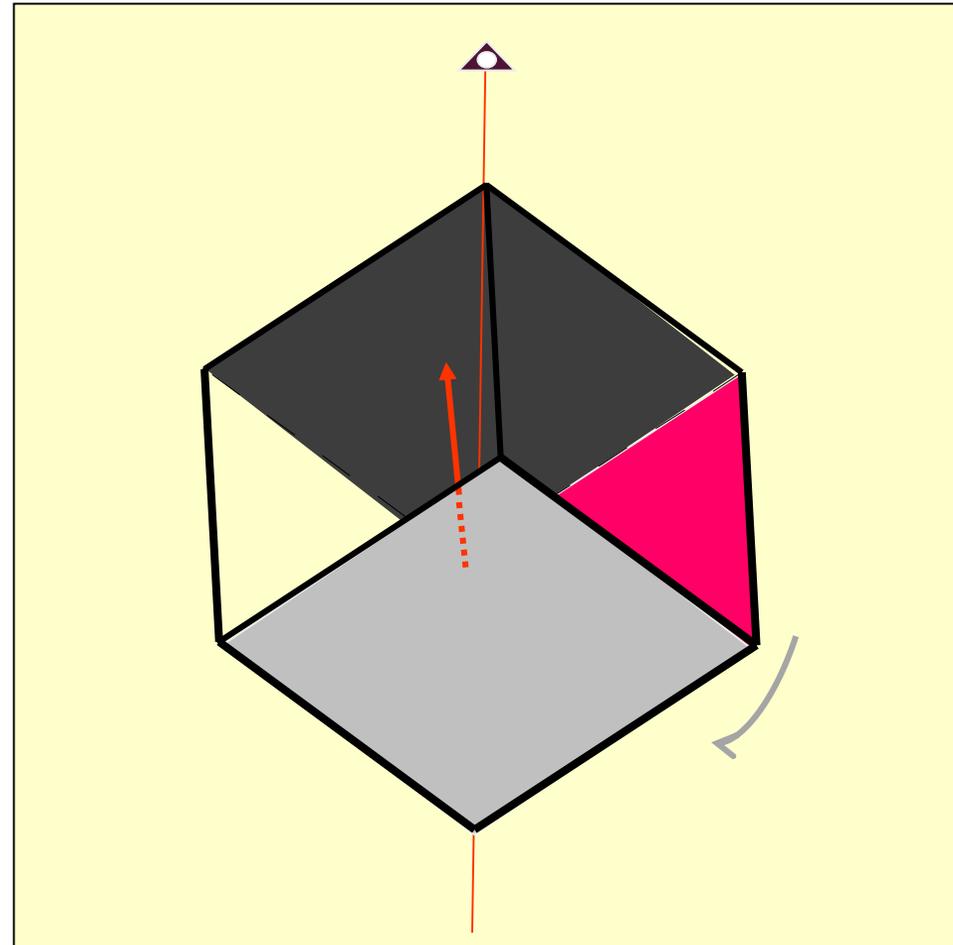
Rotação  $360^\circ/3$  (2)



### 3. Rotoinversão ternária $\bar{3}$

Rotação  $360^\circ/3$

Inversão pelo centro

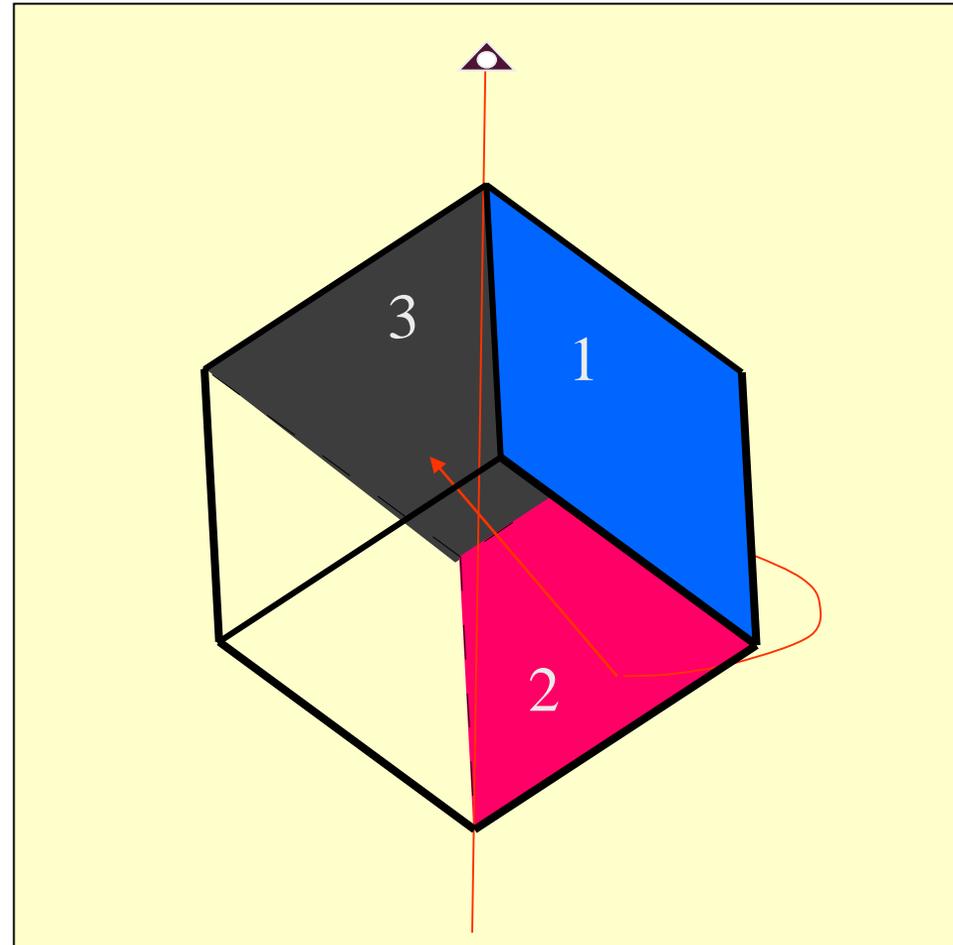


### 3. Rotoinversão ternária $\bar{3}$

Rotação  $360^\circ/3$  (2)

Inversão pelo centro

Resultado do segundo passo (3)

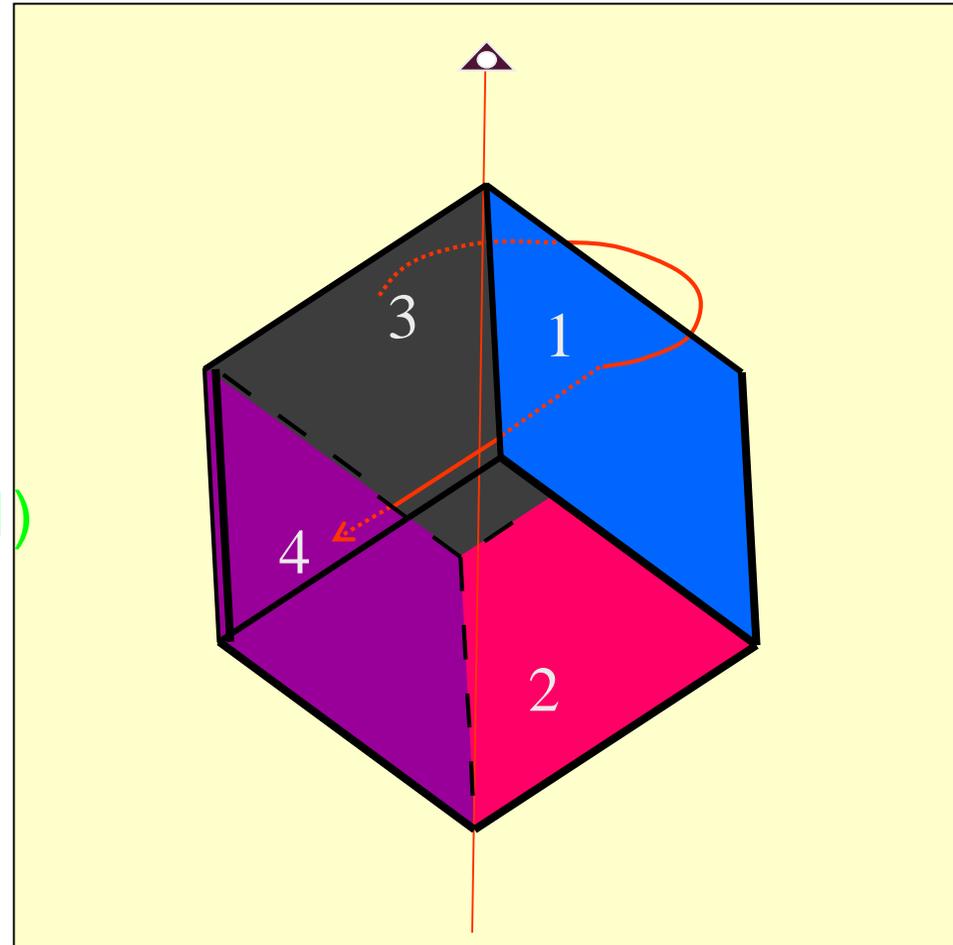


### 3. Rotoinversão ternária $\bar{3}$

Rotação  $360^\circ/3$  (3)

Inversão pelo centro (1)

Resultado do  
terceiro passo (4)

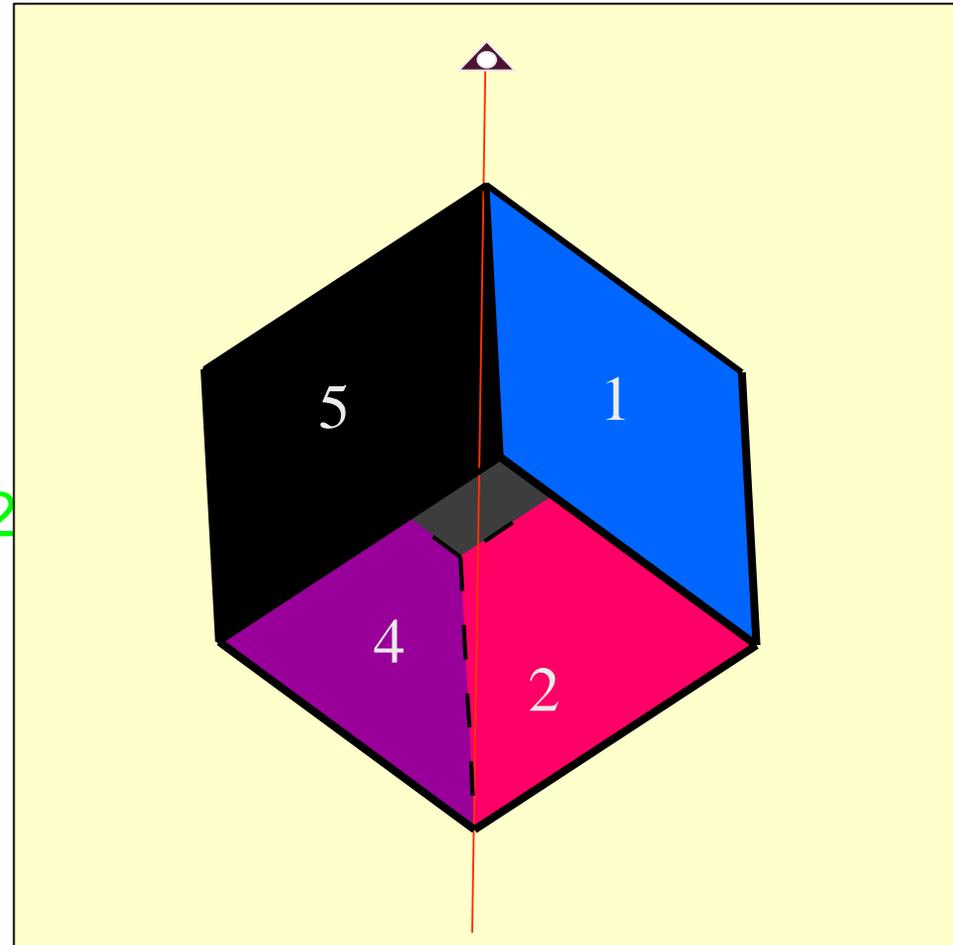


### 3. Rotoinversão ternária $\bar{3}$

Rotação  $360^\circ/3$  (4)

Inversão pelo centro (2)

Resultado do  
quarto passo (5)



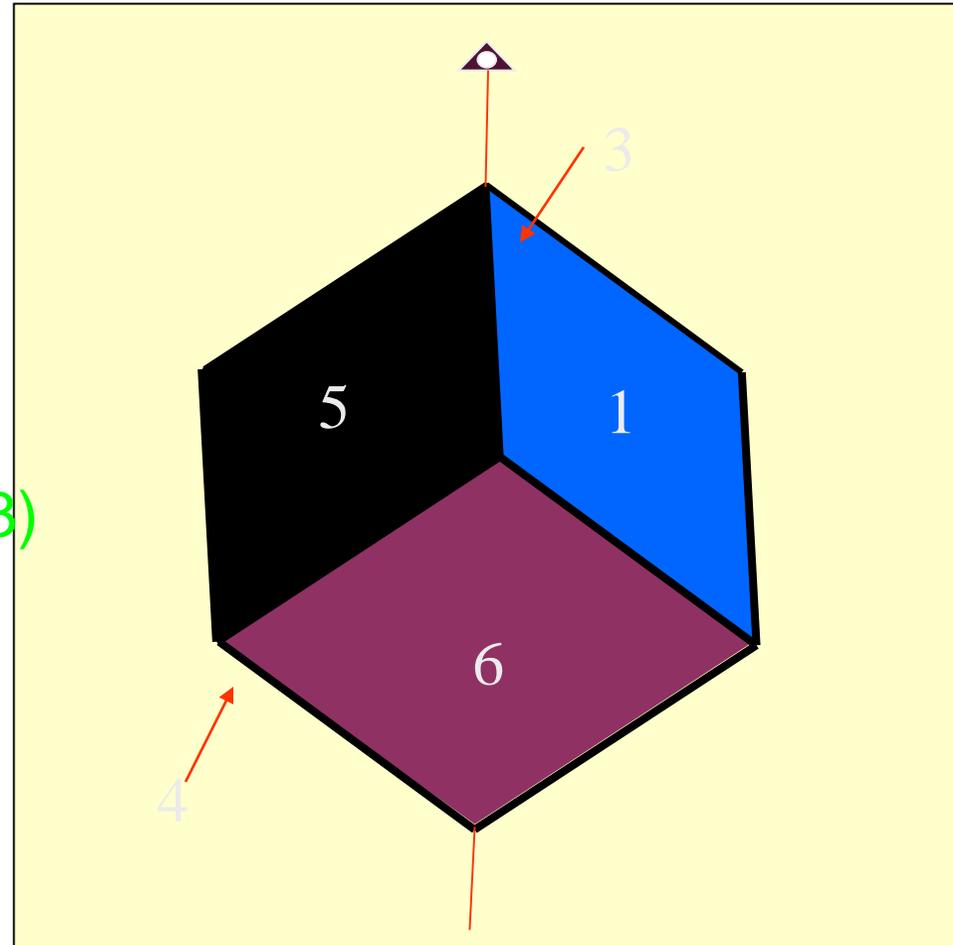
### 3. Rotoinversão ternária $\bar{3}$

Rotação  $360^\circ/3$  (5)

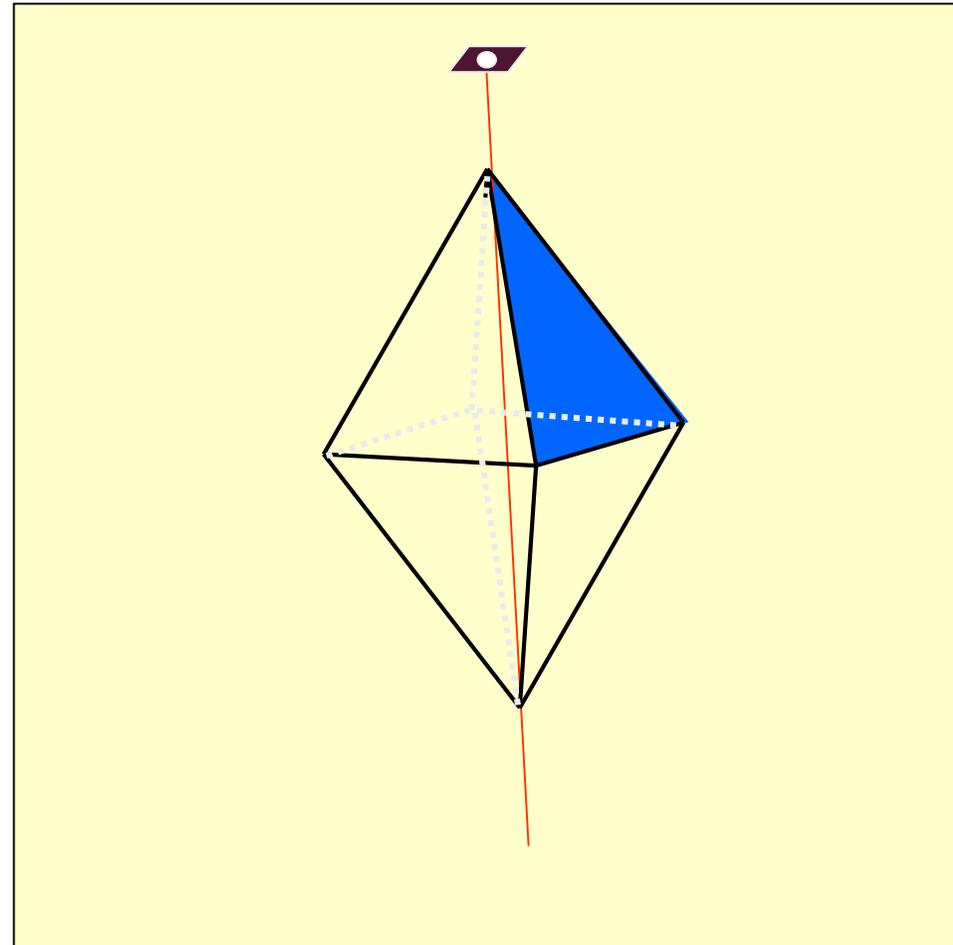
Inversão pelo centro (3)

Resultado do  
quinto passo (6)

Sexto passo chega no início:  
 $6 > (4) > 1$

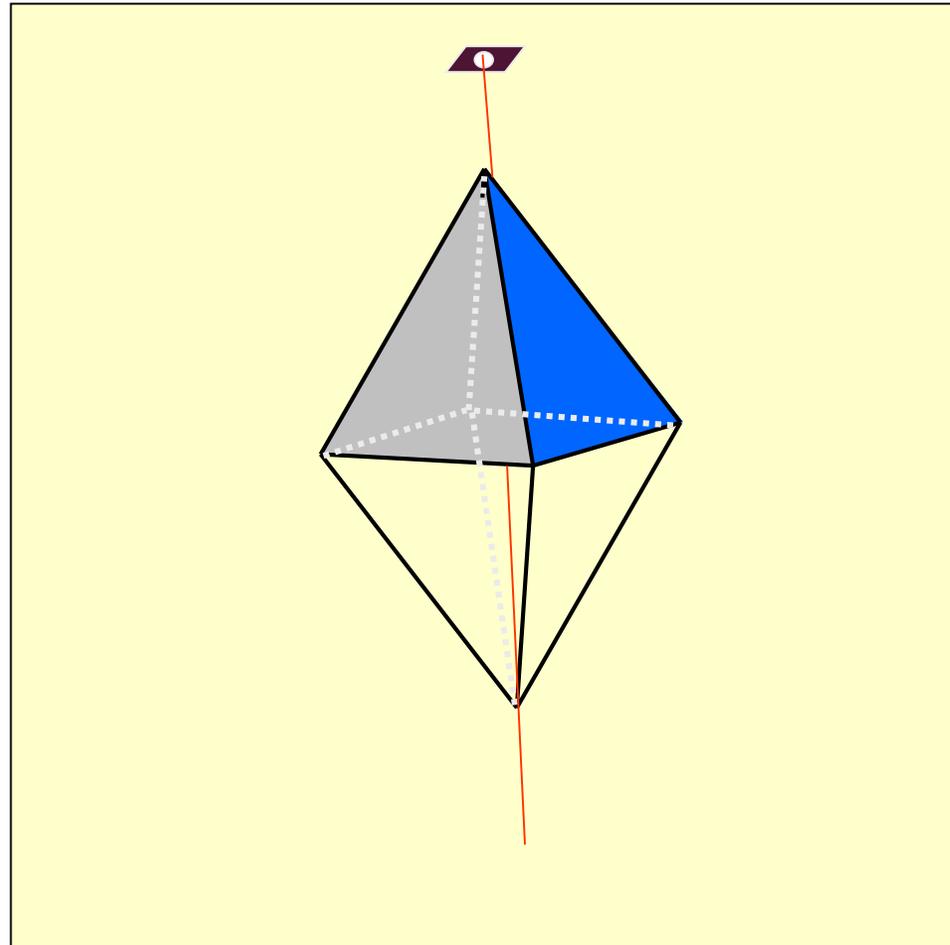


4. Rotoinversão  
quarternária 4



4. Rotoinversão  
quarternária 4 —

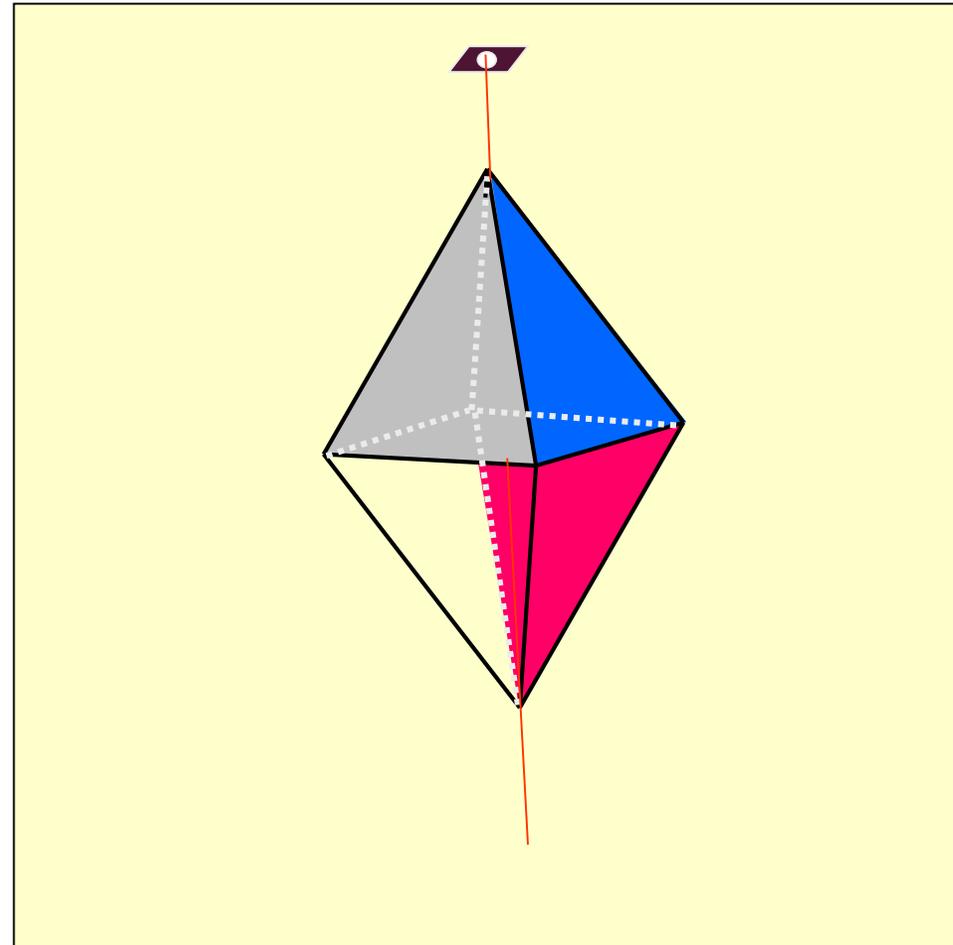
Rotação  $360^\circ/4$



4. Rotoinversão  
quarternária 4

Rotação  $360^\circ/4$

Inversão pelo centro

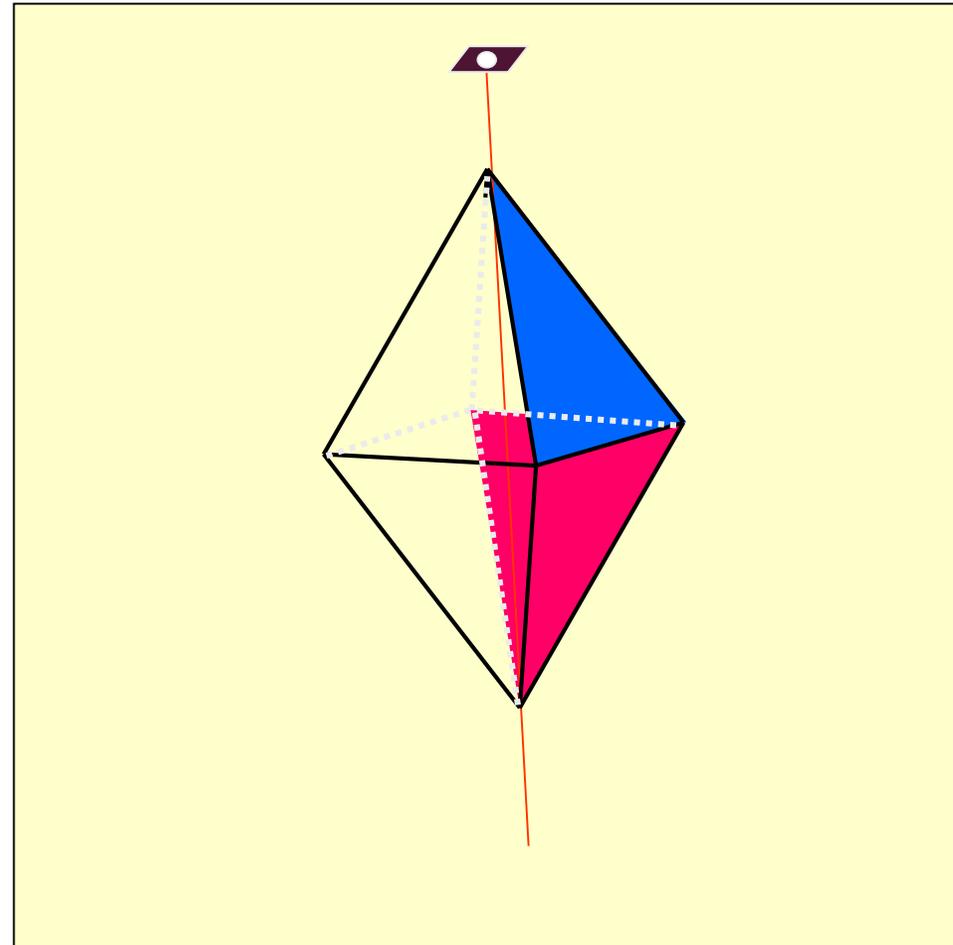


4. Rotoinversão  
quarternária 4

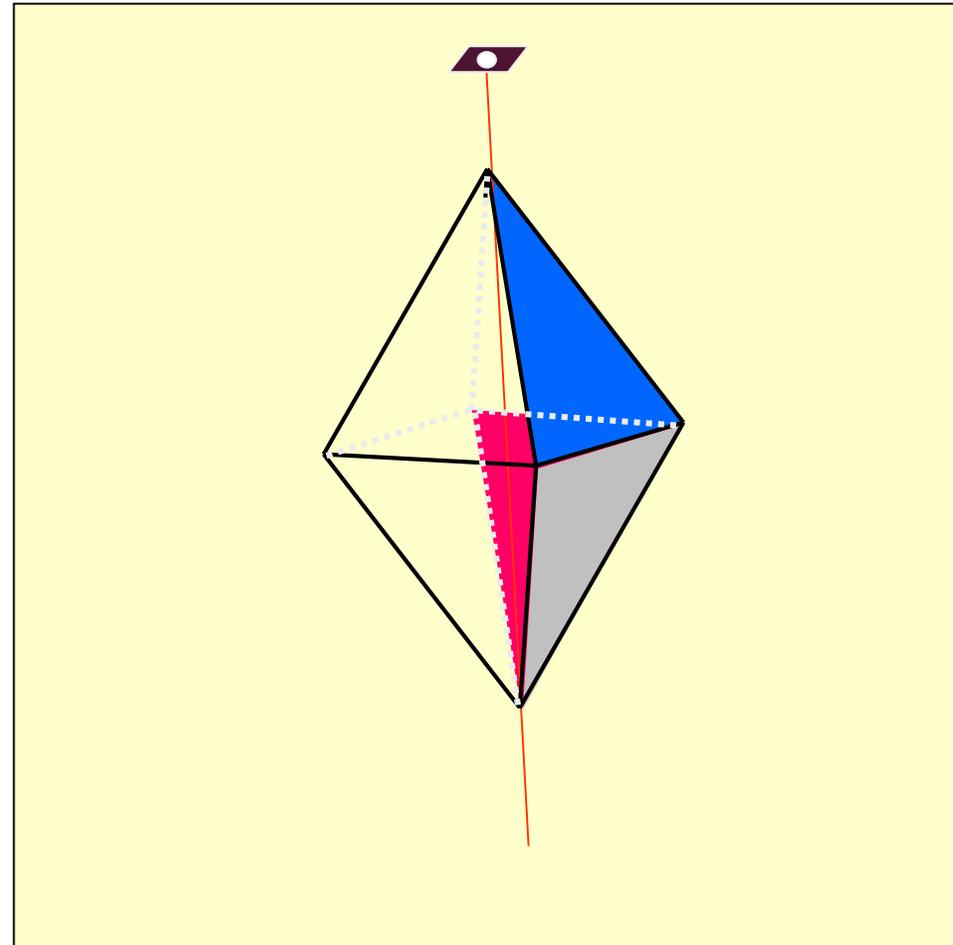
Rotação  $360^\circ/4$

Inversão pelo centro

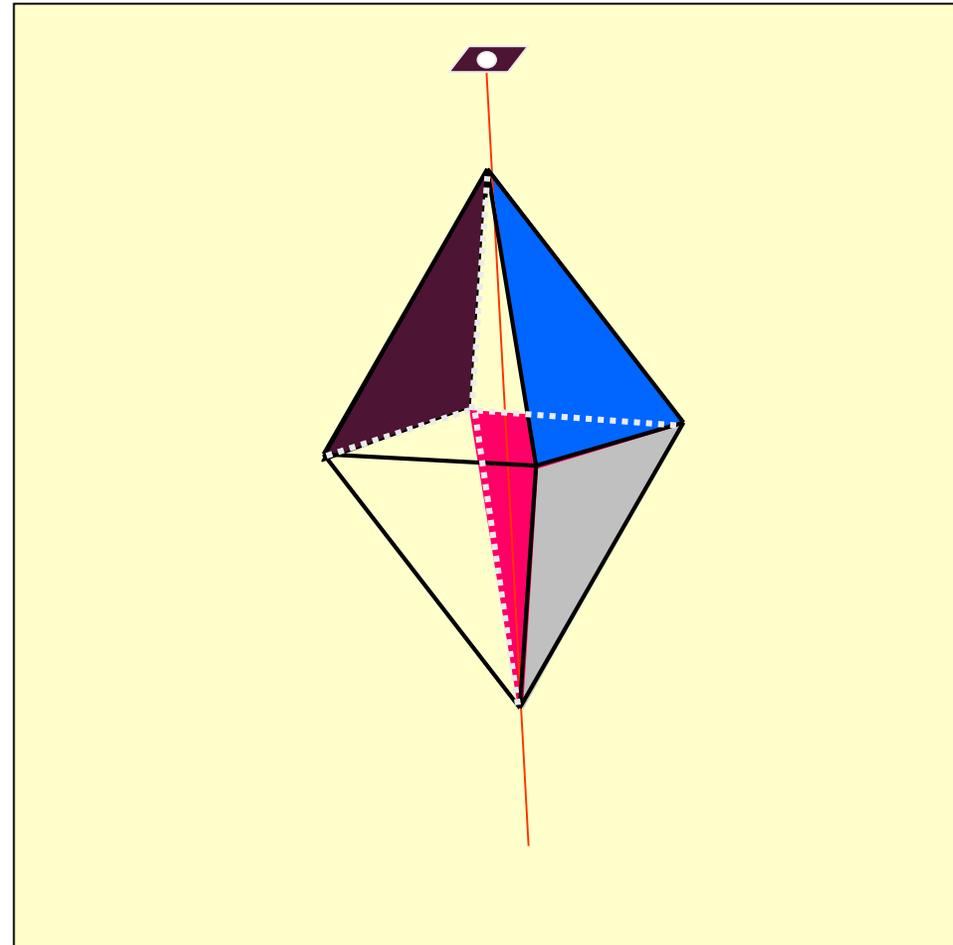
Resultado do  
primeiro passo



4. Rotoinversão  
quarternária 4

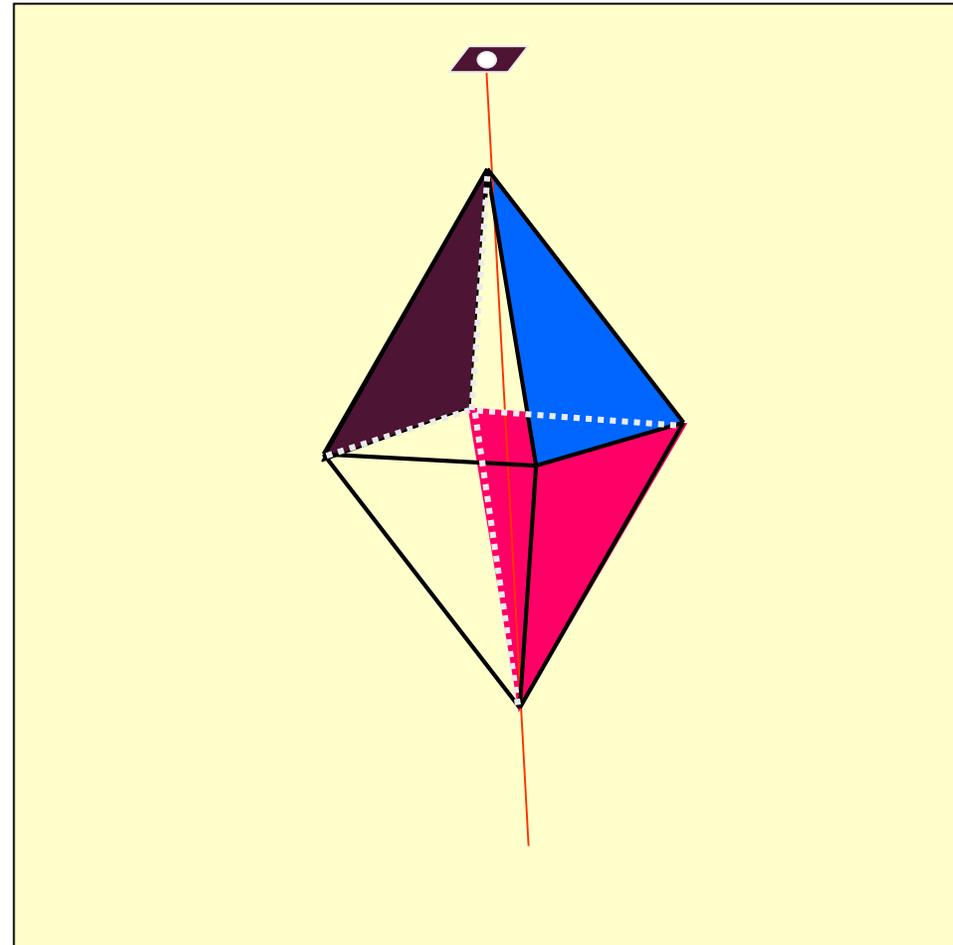


4. Rotoinversão  
quarternária 4

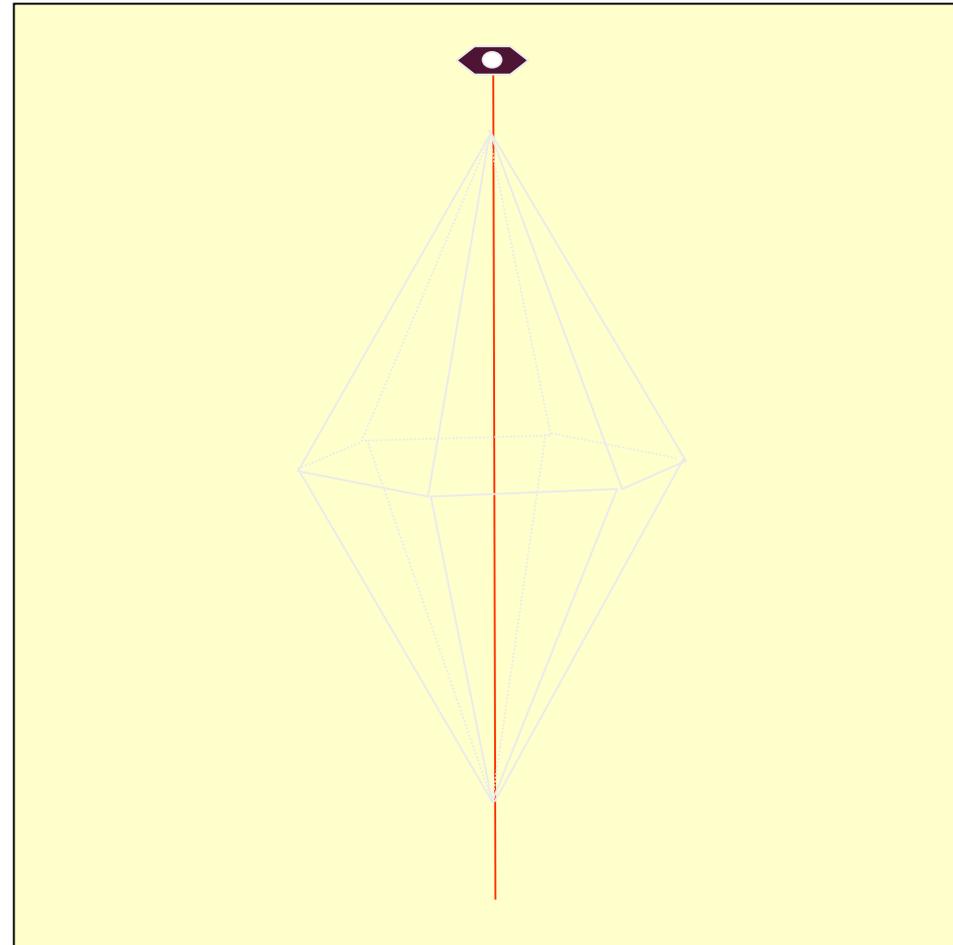


4. Rotoinversão  
quarternária 4

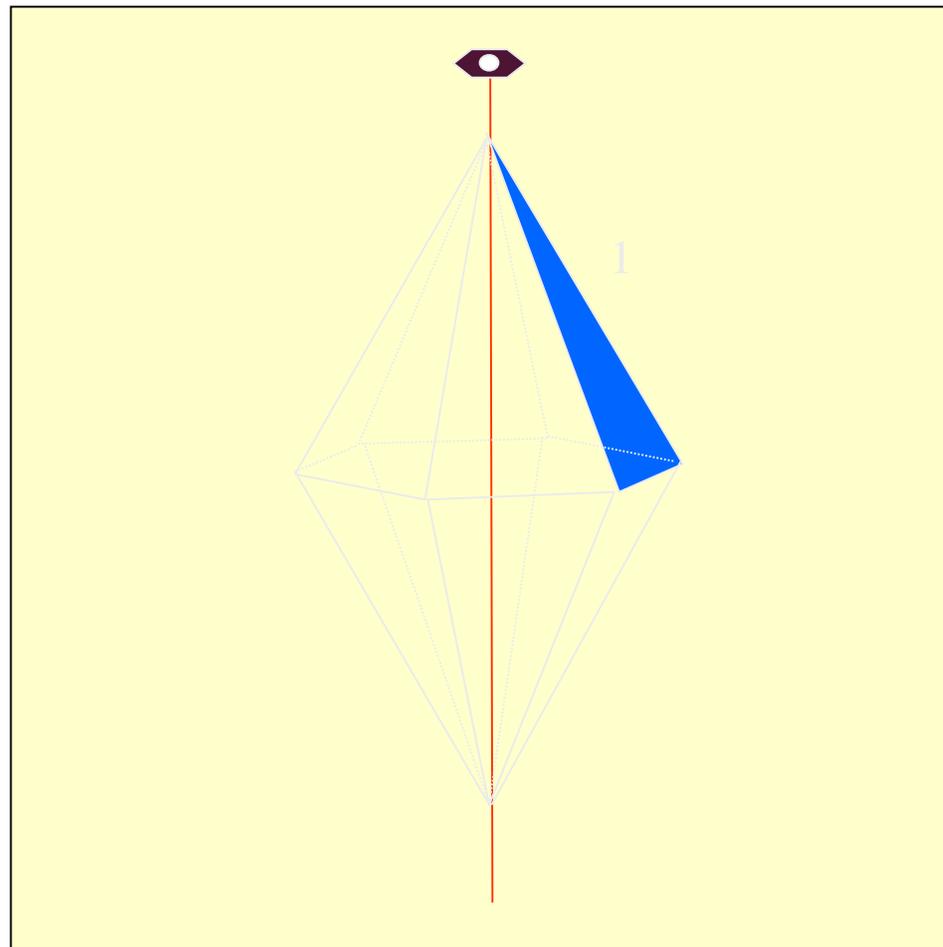
... Continuando assim



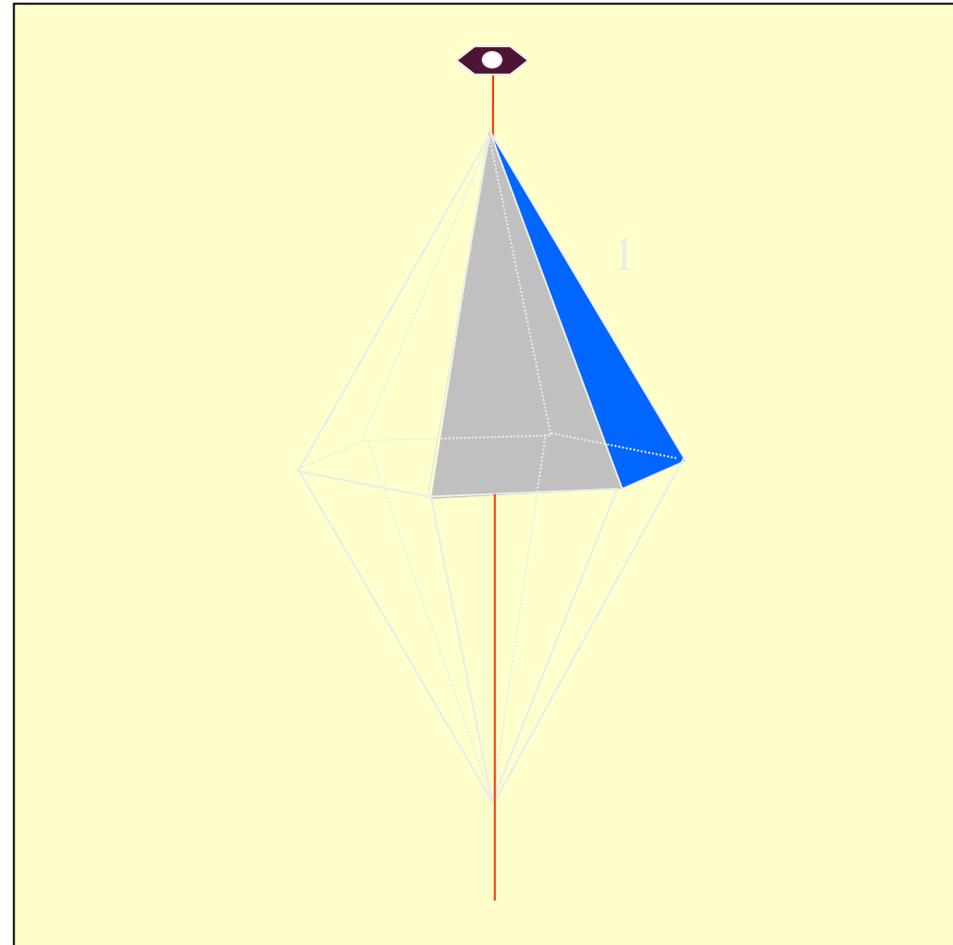
5. Rotoinversão  
senária 6



5. Rotoinversão  
senária 6

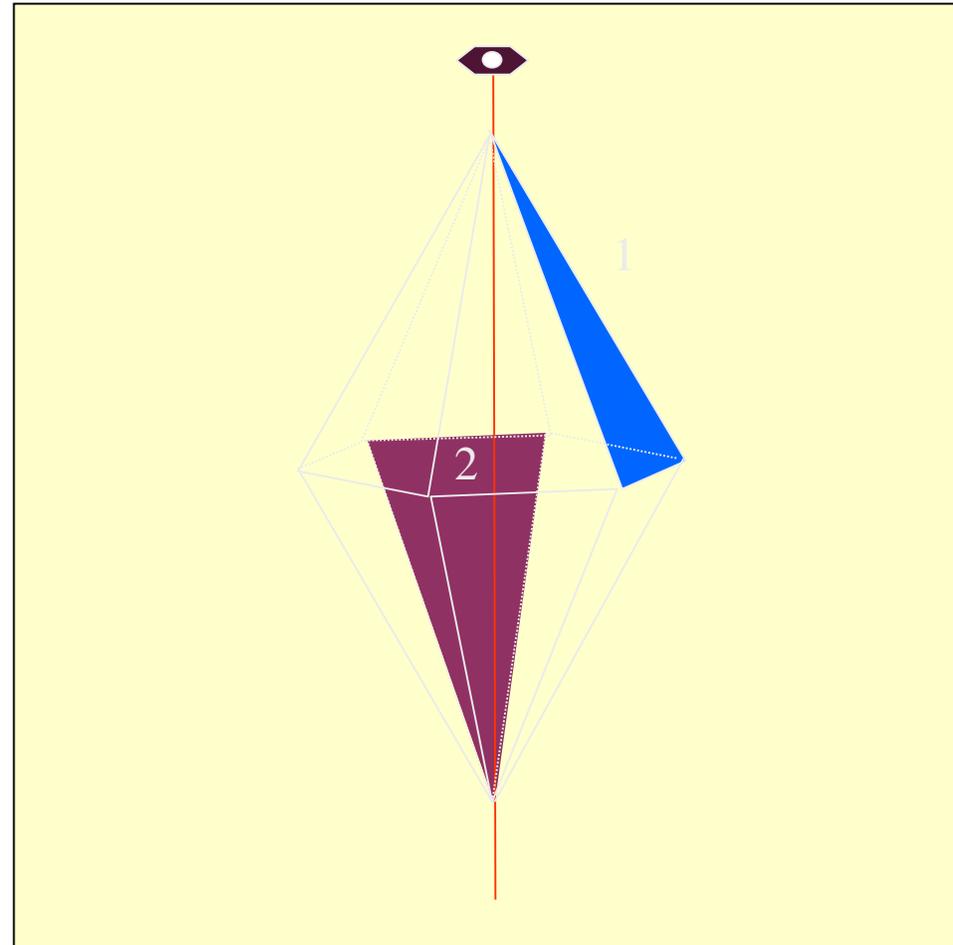


5. Rotoinversão  
senária 6

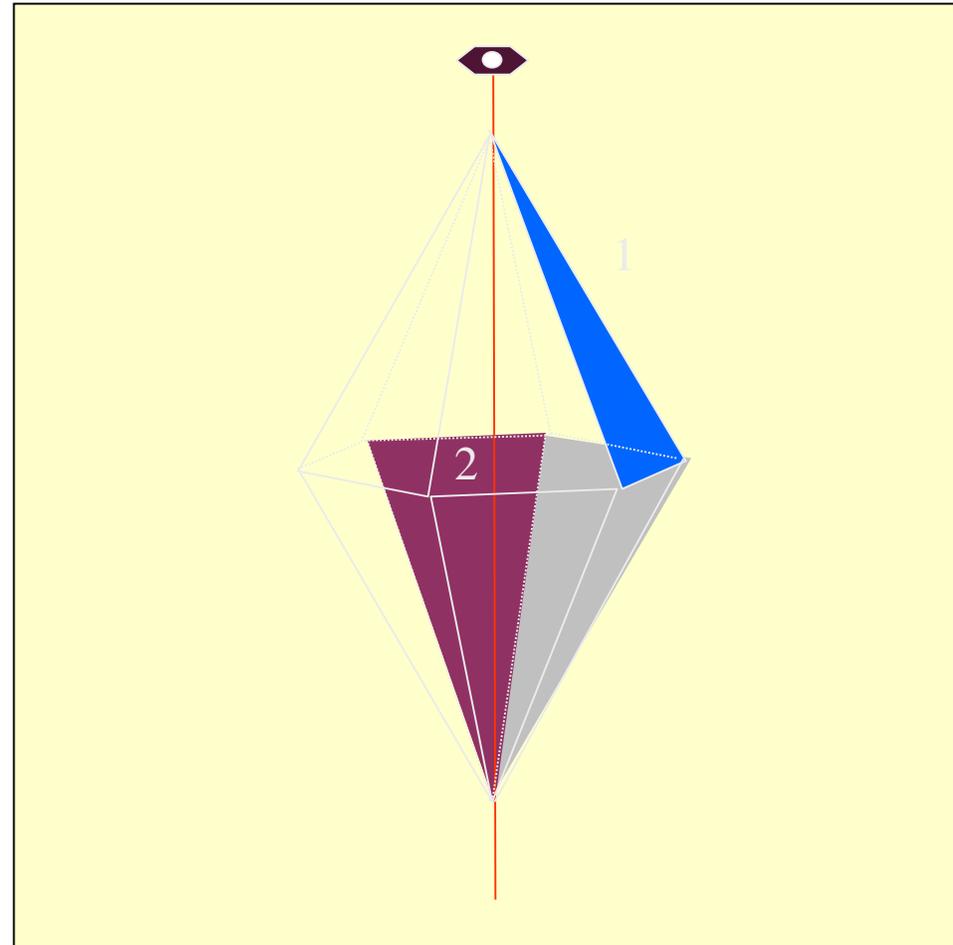


5. Rotoinversão  
senária 6

Completado o  
primeiro passo



5. Rotoinversão  
senária 6



5. Rotoinversão  
senária 6

Completado o  
segundo passo

